DE INFINITIS PARABOLIS

LIBER QVINTVS.

DE INFINITIS PARABOLIS

LIBER QVINTVS.

OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

AVTHORE
F. STEPHANO DE ANGELIS
VENETO,
ORDINIS IESVATORVM S. HIERONYMI.
In Celeberrimo Patauino Lyceo Matheseos Professore.



VENETIIS, MDCLXIII.
Apud Ioannem La Noir.
SVPERIORVM PERMISSV.

Illuſtriſſimo atque Excellentiſſimo D.

D. IOANNI PRÆSLAO S.R.I. COMITI DE LESZNO LESZCZYNSKY, DOMINO IN SMIEGEL, PRZYGODZICE, RIDZYNA, DOMBECZ, ZABOROVV, &c.

F. STEPHANVS ANGELI VENETVS, In Patauino Lyceo Matheſeos Profeſſor P.P.P.

INTER ea, quæ per grata ac iucunda vnquam mihi accidere, profectò (Illuſtriſsime ac Excellentiſsime Comes) illud maximum cenſeo, puriſſimo lacte Mathematum adoleſcentiam Tuam alere contigiſſe. Vix quippè ab Illuſtriſſimis atque Excellentiſſimis

 An-

Andrea Contareno, Nicolao Sagredo, ac Baptista Nanio, Equitibus, D. Marci Procuratoribus, Patauini Lycei Moderatoribus, & Dominis meis Clementissimis ad Mathesim enucleandam in eodem hoc Atheneo selectus, Patauinas oras attigi; dùm nuperrimè è Sarmatia adueniens, vltrò, sponteque Geometricis imbuendus, secundis auspicijs occurreris. Nondùm etenim ætatis Tuæ tertio lustro completo, tam turè, simulque festinanter Geometrica Elementa percurristi, vt exinde spem maximam feceris, iactandi in posterum haud incongruè licere, de Geometria me optimè meritum. Siquidem, si sapientissimo Salomone teste, *Gloria Patris est Filius sapiens*: qualis amabò indè mihi apud Geometras est gloria euentura, quod Mathesi Te genuerim? Profectò, si pro vt est in Adagijs, *Ex Aurora deprehenditur qualis successura sit dies: Ex vnqueque dignoscitur Leo*: non nisi splendidissima, ac fortissima, tyrocinia Tua portendunt; Teque ad Matheseos apicem peruenturum pollicentur. Idcircò, etsi ex difficiliori, ac penitiori Geometria depromptas, has attamen elucubrationes meas Tibi dicandas fore decreui. Ratus, has modò à nobilissimis, ac splendidissimis natalibus Tuis congenita benignitate, excepturas: aliquandò verò (dùm scilicet Geometricæ vires in Te vegetiores fient) earundem pondus ad Trutinam fore applicaturum. Interim vale Illustrissime atque Excellentissime Domine, simulque meæ obseruantiæ memento.

L E-

LECTORI BENEVOLO.

FVit typis cusa, paucis ab hinc mensibus, opellula nostra octaua, Accessionis ad Steriometriam & Mecanicam Pars Prima indigetata. *Primum relatiua inter connumerari, neminem ignorare arbitrandum. Prima pars saltem secundæ est index. Idcircò non nisi rectè admonuimus ipsiusmet in limine, tutè hanc expectandam. Rapieris ergo nunc fortassis in admirationem (Benigne Lector) inspiciens nostrum hocce nonum fętum à promisso tàm diuersum. Ast defecturam hanc speraremus, veniamque laturos si germana, & vera causa in aperto Tibi esset. Porrò minimè licet. Hoc vnicum itaque sufficiat scire, ipsam à geometricis ferè totaliter nos auocasse; peperisseque, vt ea omnia, quæ antea meditati eramus, ac prælo subijcere decreueramus, adhuc confusa & inconcinnata taceant. Et Deus solus tempus agnescit, quo ea digerere, ac ordinare fas erit.*

erit. Verùm post nubila Phœbus. *Benigna illa sidera, quę ab ipsis primordijs Geometriæ nos destinarunt, micantiùs affulxere; tantoque lumine mentem repleuere, vt ipsa non nisi Geometrizando conquiescens, ad Geometriam, veluti ad sacram Anchoram, confugerit. Et equidem fato haud auerso, vt liceat vndique illud rationabiliter vsurpare.*

Perditi eramus, nisi periissemus.

Contigit namque, pauculis diebus, nouiter excogitare ea omnia, quæ præsenti libello Tibi comunicanda fore statuimus. Quod eò libentiùs exequimur, quò solum tunc primùm ad nostras peruenit manus. Elementorum Sectio Prima De Corpore Authore Thoma Hobbes Malmesburiensi. *Opus Londini excusum anno* 1655. *In ipsoque animaduertere licuit, ab eximio ac celcissimo viro eorum quædam perstringi, quæ nos ipso posteriores, & in operibus nostris antehac elaboratis, & in præsenti Opusculo, considerauimus. At nec pęnituit de illis verba fecisse, nec putamus abstinendum à præsentium diuulgatione. In primis namque suis multò plura excogitauimus. Deindè per semitas totaliter diuersas; & tàm ab ipso, quàm ab alijs (quod sciamus) incalcatas, perambulauimus. Sed hoc magis fauet, ansamque præbet, quod aliqua ab eo exarata (ipsæ quadraturæ præcipuè, ex quibus solis omnia ferè pendent) fundamentis adeò labilibus, infirmisque superimponuntur, vt de ipsorum ruina valdè sit timendum. Eorum quędam non benè percipimus, nobisque videntur Malleo Geometrico tentata, haud resistere; viuidoque Geometrico igne probata, euolare.*

Sed

Sed omnibus iam dispositis, ac Typographo consignatis, apud Bibliopolam quendam, se se obtulit, Iohannis Vualisij SS. Th. D. Geometriæ Professoris Sauiliani in Celeberrima Academia Oxoniensi Arithmetica infinitorum. *Oxonij impressa, cum duobus alijs tractatibus eidem præpositis, anno* 1656. *Hanc ingenti alacritate pretio comparauimus; ac eidem studendæ nos secundum totum contulimus. (Ipsam namque etiam anno* 1660. *videre licuit, sed obiter & per transennam.) Quum enim impressio Opusculi nostri*, De infinitorum spiralium spatiorum mensura *ferè ad calcem redacta esset; admonente Clarissimo Geometra Petro Paulo Carauaggio, curauimus ipsam mutuò receptam, transcurrere; vt adnotauimus in digressione præfati tractatui adnexa. (Protinùsque reperimus, in ipsa dedicatione videlicet) egregium virum, profundumque Mathematicum acriter contra Hobbes inuehere sequentibus verbis.* Ex eo autem tempore, (mense iam proximè præterito) prodijt Libellus D. Hobbes; qui iam magna pollicitus in Geometria, & speciatim circuli quadraturam angulique in data ratione sectionem, aliaque his cognata Libellum tandem suum in publicum emisit, quo se ostendit nec horum quicquam præstitisse, nec quidem præstiturum esse; adeo enim turpissimis paralogismis vbique scatet Libellus iste, vt rarò aliquando quid sanum inuenias, (quod nostro istius Elencho, qui & iam sub Prelo est, manifestum fiet;) vnde & Authorem non eum esse facile dignoscas à quo huiusmodi mysteria speremus retexenda. *Sed ab his alienis propria nos retraxere.*

re. *Quod superiùs videlicet*, *)sua* Noua Methodus inquirendi in curuilineorum quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata, *tamquam complementum Caualerianæ Methodi Indiuisibilium venditatur, his verbis.* Nempe inde ortum sumit hæc nostra Methodus, vbi Cauallerij Methodus Indiuisibilium desinit. Vnde etiam & operi ipsi, ipsique titulo, ansa data est; vt enim ille suam, Geometriam Indiuisibilium, ita Ego Methodum nostram, Arithmeticam infinitorum, nominandam duxi. *Porrò Methodus Caualerij, etiam ipso Vuallisio teste, à Geometris passim recipitur. Sic namque ait in proposit.* 43. *Arithm. Infinit.* At mihi sufficere videntur illæ quas produxi, Cauallerij Methodum Indiuisibilium (quoniam eam inuenio à Geometris iam esse receptam) secutus. *Et in dedicatione de Sectionibus.* Opus ipsum quod attinet; videbitis me, statim ab initio, Cauallerij Methodum Indiuisibilium, quasi iam à Geometris passim receptam, tàm huic quàm tractatui sequenti (qui huic gemellus est) substernere. *Hunc locum cum transcripsissemus anno* 1660. *in nostra citata Digressione, non animaduertimus, quæ ipse subnectit post parentesim,* sed à nobis aliquatenus siuè emendatam siuè saltem immutatam. *Quid autumas?* Immutatam; *parum refert.* Sed emendatam? *Methodi peroptimè fundatæ non emendantur. Et qui hoc præsumit, nihil aliud effutit quàm errores & paralogismos. Vt ergo (Benigne Lector) nullum patiaris scandalum in Caualeriana Methodo, mensurabimus in calce huius tractatuli, Infinita Spatia Spiralia Vuallisij.*

lesij. Expectabimusque tuam innappellabilem sententiam promulgandam super hoc. Quisnam rectius geometrizauerit; Vuallisius sua noua Methodo, an nos, anteriorem Cauallerij sequuti. Ferre autem hanc sententiam facilè Tibi erit, quam iure merito diximus innappellabilem. In Geometricis quippè versamur. Unus, vel alter nostrum decipitur, Non datur medium. Quosdam etiam ad rem nostram attinentes, (quos errores putamus) in Hobbes manifestabimus. Quòd equidem non exequimur ad supprimendos viros doctissimos, quos summa reuerentia prosequimur. Quod si, hos, reperiemus aliquos paruulos errores commisisse; non ex hoc immensa merita erga Rempublicam Geometricam horum Heroum, vel tantillum quidem sunt minuenda. Homero namque antiquiùs, quò ad rem, putandum est Adagium.

Quandoque bonus dormitat Homerus.

His adde, nos prefatis Authoribus quamplurimum debere, perpetuisque vinculis obstringi. Vuallisius namque semper de Cauallerio preceptore nostro honorificentissimè locutus fuit. Nec verbum supra consideratum aliqualiter officit: quinimmò fauet, cum ex eo Methodi Caualeriana splendor clarius sit micaturus. Ast Hobbes profert de ipsomet encomium eximium. Dum in calce cap. 18. diridens pauidos, gregariosque eos geometras, qui nihil reperiri in Geometria autumant, nisi pressis antiquorum vijs; ex Archimede, Apollonio, & Cauallerio in Geometricis triumuiratum constituit, fando. Posteriores, excepto Archimede & Apollonio; & nostris temporibus Bonauentura, nihil esse in Geometria vltra horum industriam, existiman-

mantes, omnia ex eorum scriptis deducenda esse, aut inuentu impossibilia putarunt. *Relinquamus ergo pro nunc celeberrimos viros Hobbes, & Vuallisium, ac vlterius pergentes, dicamus, in calce huius tractatuli, coronidis loco, proposita fore quadam solida Geometrica infinita, seu potius infinitè infinita. Quæ vtique non vidimus ab alijs considerari. Hæc à nobis nuncupantur* Infinita Conoidea Hyperbolica. *Quorum omnium assignamus breuissimè & mensuram, & centra grauitatis. Sed rem expedit videre in loco proprio. Interim (mi Lector) Vale.*

Noi Reformatori dello Studio di Padoa.

HAuendo veduto per fede del P. Inquis. nel libro quinto intitolato de Infinitis Parabolis del P. F. Steffano de Angelis Veneto, non esserui cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per attestato del Segretario nostro niente contro Prencipi, e buoni costumi, concedemo licenza, che sij stampato, osseruandosi gl'ordini, &c.

Dat. dal Magist. nostro li 30. Maggio 1663.

Andrea Contarini Cau. Proc. Refor.
Nicolò Sagredo Proc. Ref.

Angelo Nicolosi Segr.

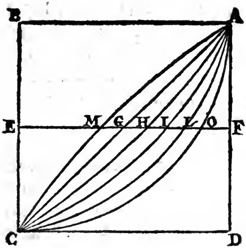
DE

DE INFINITIS PARABOLIS

LIBER QVINTVS.

QVATVOR aliquandò libros conſcripſimus, quibus titulum affiximus, *De Infinitis Parabolis*; in primique limine, indolem ipſarum, Caualerij veſtigia inſequentes, haud obſcurè aperuimus, vt inibi licet inſpicere. Suppoſuimus namque, in parallelogrammo BD, actas fuiſſe CGA, CHA, CIA, CLA, aliaſque infinitas diagonales, tali ſtatuta lege, vt iuxta libitum ducta EF, parallela CD, diagonales ipſaſmet ſecante in punctis G, H, I, L, &c. in prima ſit DA, ad AF, vt CD, ad GF; in ſecunda ſit CD, ad HF, in duplicata ratione DA, ad AF; in tertia ſit CD, ad IF, in triplicata ratione DA, ad AF; & ſic in infinitum in altioribus po-

testatibus. Vndè conclusimus in sexta deffinitione, hauriri manifestè ex ipsarum genesi, CD, seù EF, FG, FH, FI, FL, &c. esse magnitudines continuè proportionales. Hæc omnia, cum alijs, videat lector in loco citato, vti etiam ad ipsarum quadraturam attinentia, quæ ex Caualerio ipsomet, quantum sufficere arbitrabamur, exposuimus in prima propositione, ac in scholijs eiusdem. Nunc considerare debemus tantum, quòd in ijs infinitis parabolis incrementa proportionum fiebant per additionem continuam proportionum, primæ æqualium, antecedentibus. Nimirum, proportioni EF, ad FG, addita æquali proportione GF, ad FH, consurgebat proportio EF, ad FH, duplicata proportionis EF, ad FG. Sic huic addita proportione HF, ad FI, æquali tàm ei EF, ad FG, quam ei GF, ad FH, oriebatur proportio EF, ad FI, triplicata proportionis EF, ad FG. Et sic in alijs. Modò harum proportionum progressus alia via est considerandus: sic nimirum vt subsequens proportio minimè addat antecedenti proportionem primæ æqualem, (*quam Radicalem dicere poterimus*) sed eius dimidiatam. V. g. si supponamus EF, ad FI, habere duplicatam proportionem eius, quam habet EF, ad FG, inter GF, FI, sit media FH: EF ad FH, habebit integram, & dimidiatam, seu sesquialteram proportionem eius, quam habet EF, ad FG, nempe radicalis. Sic si supponamus EF, ad FH, habere duplicatam proportionem eius, quam habet EF, ad FG, & EF,
ad



ad FL, triplicatam (modò FI, ſit media inter HF, FL) EF, ad FI, habebit proportionem duplicatam, & dimidiatam ſimul, ſeu duplam ſeſquialteram eius, quam habet EF, ad FG. Si ergo intelligamus per omnia puncta extrema harum mediarum ductas fore diagonales, &c. (vti etiam factum fuit in alijs, quas antea explicauimus) tenebimus alias infinitas parabolas, quæ ad priores relatæ poterunt dici *Intermediæ*, quia mediant inter eas. Et omnes ſimùl conſtituent feriem infinitam à prioribus diuerſam.

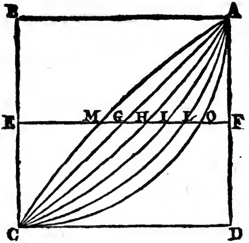
Verùm hæc infinita ſeries adhuc non eſt integrè regulata, ac ordinata; quia nequaquam procedit in omnibus per æqualia incrementa proportionum. Nam proportio EF, ad FG, eſt duplicata proportionis GF, ad FH. Rectè autem, & integrè ordi-

nabitur, si etiam proportio E F, ad F G, dimidietur; hoc est reperiatur media inter E F, F G. Hoc autem tantum præstabit semiparabola quadratica C K A D, cuius basis C D, diameter D A. In ipsa namque est quadratum C D, seù E F, ad quadratum K F, vt D A, ad A F; nempe C D, vel E F, ad F G.

Tali autem pacto tenebimus binas series infinitas, trilineorum vnam, parabolarum alteram. Et in prima erit primum trilineum semiparabola quadratica C k A D: secundum triangulum C G A D: tertium trilineum C H A D, medium inter triangulum, & trilineum quadraticum C I A D: quartum dictum trilineum quadraticum: & sic in alijs. In serie autem semiparabolarum, erit prima semiparabola trilineum quadraticum C K A B: secunda triangulum C G A B: tertia semiparabola intermedia C H A B, &c.

Ex quibus apparet manifestè, quod si tota simul sumatur series, numerus ordinatorum variatur, ita vt omnium ordinatorum numeri in prima serie, quæ dici poterit *Principalium*, sint in tota serie pares, & dupli numerorum in serie principalium. V. g. numerus trilinei linearis, seu trianguli, in serie principalium erat impar, nempe 1. nunc euadet par, & duplus vnitatis, nempe 2. Sic numerus trilinei quadratici, qui erat 2. euadet 4. Trilinei verò cubici, qui erat 3. fiet 6. &c. Numeri verò intermediarum erunt omnes impares.

In



In posterum considerabimus, vel totam seriem, vel series principalium, vel intermediarum solummodò iuxta exigentiam. Pro quadratura tamen intermediarum, ipsarumque cognitione sufficit quadratura principalium tantum, vt statim apparebit.

Præsupponendum verò est pro dicendorum notitia, deinceps nos passim, & vbique vsurpaturos fore terminos omnes, quos in alijs prioribus aliquandò explicauimus, præcipue in opere *De Infinitis Parabolis*. Sit ergo

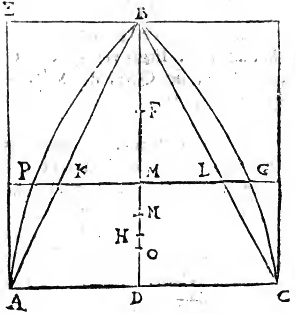
PROPOSITIO PRIMA.

In tota serie Cylindrus circumscriptus cuilibet conoidi, cuius numerus sit numerus par, erit ad ipsum, vt parallelogram-

grammum circumscriptum parabolæ, cuius numerus subduplus numeri conoidis, ad ipsam: & hoc tàm secundum totum, quàm secundum partes proportionales.

ESto quodlibet conoides parabolicum APBC, cuius diameter BD, & cylindrus ei circumscriptus EC, sed numerus huius sit par; nempe sit vel conus, cuius numerus in tota serie est 2: vel conoides quadraticum, cuius numerus 4: vel cubicum, cuius numerus 6. &c. item sit quælibet parabola AkBC, vel semiparabola AkBD, (sufficit hæc namque) cuius itidem diameter eadem BD, & parallelogrammum circumscriptum ED, & huius numerus sit subduplus numeri conoidis. V.g. si conoides sit conus, sit AkBD, semiparabola, trilineum parabolicum quadraticum. Si conoides sit quadraticum, sit AkBD, triangulum. Si conoides sit cubicum, sit AKBD, semiparabola media inter triangulum, & semiparabolam quadraticam, & sic in alijs, vt lector proprio Marte percipiet faciliter. Aio cylindrum EC, esse ad conoides, vt est rectangulum ED, ad semiparabolam; hocque verificari tàm secundum totum, quam secundum partes proportionales. Iuxta arbitrium, accipiatur in BD, quodlibet punctum M, per quod in conoide, & cylindro transeat planum basi parallelum; in semiparabola verò, & rectangulo linea &c. In conoide, est vt DB, ad BM, sic potestas AD, congruens conoidi, ad similem potestatem PM. Pariter in semiparabola

est

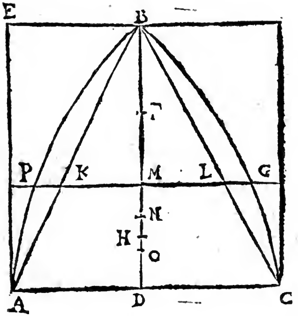


eſt vt DB, ad BM, ſic poteſtas AD, congruens parabolæ ad ſimilem poteſtatem kM. Ergo vt congruens poteſtas AD, vel QM, in conoide ad ſimilem poteſtatem PM, ſic in parabola congruens poteſtas AD, vel QM, ad ſimilem poteſtatem kM; vel vt multiplicata proportio QM, ad MP, in conoide quotus eſt ſuus numerus, ſic multiplicata proportio QM, ad Mk, in parabola quotus eſt ſuus numerus. Cum verò numerus conoidis ſit duplus numeri parabolæ, etiam proportio multiplicata QM, ad MP, erit duplicata proportionis multiplicatæ QM, ad MK.

Qua-

Quare erit etiam, vt quælibet pars proportionis multiplicatæ QM, ad MP, sic similis pars proportionis multiplicatæ QM, ad MK. Sed similis pars proportionis duplicatæ QM, ad MP, est proportio QM, ad Mk. Ergo vt duplicata proportio QM, ad MP, sic QM, ad Mk. Sed antequam vlteriùs procedatur, lubet vno, vel altero exemplo explicare supradicta, quæ in tali vniuersalitate nimis videntur obscura. Supponamus APBC, e. g. esse conoides parabolicum cubicum, cuius numerus in tota serie est 6: & vt DB, ad BM, sic cubus QM, ad cubum MP; nempe proportio triplicata proportionis QM, ad MP. In tali casu parabola AKBC, erit media inter linearem, seu triangulum, & quadraticam, cuius numerus erit 3. & DB, ad BM, erit in vnica & dimidiata proportione QM, ad Mk; nempe in eius sesquialtera. Ergo erit etiam, vt triplicata proportio QM, ad MP, sic vnica, & dimidiata proportio QM, ad Mk. Sed eadem pars est duplicata proportio QM, ad MP, triplicatæ proportionis QM, ad MP, ac vnica proportio QM, ad Mk, vnicæ & dimidiatæ proportionis QM, ad Mk, (vtraque enim est prioris subsesquialtera.) Ergo erit etiam, vt duplicata proportio QM, ad MP, seu vt quadratum QM, ad quadratum MP, sic vnica proportio QM, ad MK; nempe sic linea QM, ad ipsam Mk. Sic si supponamus APBC, conoides esse quadrato cubicum, cuius numerus erit denarius, parabola erit

media



media inter quadraticam, & cubicam, & eius numerus quinarius. Et in conoide erit DB, ad BM, in quintuplicata proportione QM, ad MP: & in parabola erit DB, ad BM, in duplicata, & dimidiata proportione QM, ad Mk. Eædem ergo erunt proportiones quintuplicata QM, ad MP, & duplicata cum dimidiata QM, ad MK. Cumque eadem ſit pars duplicata QM, ad MP, eius quintuplicatæ, ac ſimplex QM, ad Mk, eius duplicatæ, & dimidiatæ. Erit etiam, vt duplicata proportio QM, ad MP, ſeu vt quadratum QM, ad quadra-

tum MP, ſic QM, ad Mk. Sic lector experietur ſi exemplificabit in alijs.

Cum ergo ſit vniuerſaliter vt duplicata proportio QM, ad MP; nimirum vt quadratum QM, ad quadratum MP, ſic QM, ad Mk. Et vt quadratum ad quadratum, ſic circulus radij QM, ad circulum radij PM. Erit etiam vt circulus ad circulum, ſic QM, ad Mk. Sed punctum M, acceptum fuit arbitrariè. Ergo vt omnes circuli cylindri ad omnes circulos conoidis, ſic omnes lineæ rectanguli ad omnes lineas parabolæ. Nempe, vt cylindrus ad conoides, ſic rectangulum ad parabolam.

Adnotetur autem, quòd hic diſcurſus valet a triangulo ſupra, non a triangulo infra. Si enim APBC, ſit conus, vt AkBD, ſit trilineum quadraticum, diſcurretur ſic. Vt quadratum BD, ad quadratum BM, ſic tàm quadratum QM, ad quadratum PM, quàm QM, ad MK. Et ſic in omnibus.

Quòd verò dictum eſt de totis, eodem modo probabitur de partibus proportionalibus. V.g. eodem modo probabitur eſſe cylindrum QC, ad fruſtum conoidale APGC, ac rectangulum QD, ad fruſtum parabolicum AkMD. Ergo in omnibus, & per omnia patet propoſitum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Cum ergo in propoſit. 15. libri 2. de Infinitis Parabolis tradita ſit ratio, quam habent cylindri circum

cumſcripti ad omnia conoidea parabolica contenta in ſerie principalium, quæ etiam ſunt illa omnia contenta in tota ſerie, quorum numeri ſunt pares: conſequenter, ex cit. loco, poterimus deducere quadraturam omnium parabolarum.

Attamen animaduertetur, quòd in citata propoſ. pro eliciendis menſuris conoideorum in ſerie principalium, vſi ſumus quadraturis omnium trilineorum; & conſequenter ſemiparabolarum ipſarum genitricium. Vndè, nunc vellè deducere talium ſemiparabolarum quadraturas ex menſuris conoideorum ex ipſis genitorum, aliud non eſſet quam circulare. Quod vtique verum eſt. Sed attamen non modo hauritur quadratura tantùm ſemiparabolarum principalium (in quo caſu fieret vtique circulatio;) ſed etiam omnium intermediarum; quæ minimè inſeruiebant menſuris conoideorum principalium. Benè ergo diximus ſupra, quadraturam principalium ſufficere ad quadrandas etiam intermedias. Nam principalium quadratura parit menſuram omnium conoideorum principalium. Illa conoidea quorum numeri in ſerie principalium ſunt impares inſeruiunt quadraturis omnium intermediarum. Quare omnia pendent ex principalium quadratura.

SCHOLIVM II.

Propiùs ergo ad rem accedentes, poterimus ſta-

tuere in tota ferie, eſſe parallelogrammum circumſcriptum parabolæ ad ipſam, vt numerus parabolæ binario auctus ad numerum parabolæ. Nempe in prima, quæ patuit ſupra trilineum parabolicum quadraticum, vt 3. ad 1. In ſecunda, quæ pariter patuit triangulum, vt 4. ad 2. In tertia, quæ mediat inter triangulum, & parabolam quadraticam, vt 5. ad 3. Et ſic in alijs. Nam ex citata propoſit. 15. eſt cylindrus circumſcriptus conoidibus principalibus ad ipſa, vt numerus binario auctus ad numerum. Numerus autem binario auctus, & numerus in ſerie principalium, idem eſt cum numero binario aucto, & cum numero in tota ſerie illius parabolæ cuius numerus ſit ſubduplus illius numeri, qui exponit numerum principalis in tota ſerie locati, vt manifeſtè patet.

Poterimus ergo dicere, in tota ſerie, eſſe per conuerſionem rationis, parallelogrammum ad ipſa infinita trilinea, vt numerus binario auctus ad binarium. Nempe in primo, quod eſt parabola quadratica, vt 3. ad 2. In ſecundo, quod eſt triangulum, vt 4. ad 2. In tertio, vt 5. ad 2. & ſic in alijs.

Cum verò triangulum ſit dimidium parallelogrammi, erit ad quodlibet ex infinitis trilineis, vt dimidium numeri auctum vnitate ad binarium: nempe vt numerus binario auctus ad quaternarium. Quare quandò triangulum excedit trilineum (non enim ſemper excedet, ſed incipiendo à trilineo intermedio inter ipſum triangulum, & trilineum parabolicum quadraticum) erit per conuerſionem rationis

nis ad excessum ipsius supra trilineum, vt numerus binario auctus ad excessum supra quaternarium.

SCHOLIVM III.

Porrò non tantum in cit. proposit. 15. traduntur mensuræ omnium conoideorum principalium, sed etiam segmentorum omnium ipsorum resectorum planis basibus parallelis, & hoc quidem in schol. 2. eiusdem propositionis. Cum verò probatum sit esse cylindros ad ipsa conoidea, vt rectangula ad ipsas parabolas supra expositas & secundum totum, & secundum partes proportionales; habebimus consequenter rationes rectangulorum circumscriptorum omnibus segmentis parabolarum resectarum lineis basibus parallelis ad ipsa segmenta.

SCHOLIVM IV.

Postremo loco adnotetur, quòd ex nostris doctrinis generalibus expositis in lib. 4. de Infinitis Parab. & passim vsurpatis in alijs operibus, quas subindè publicauimus, deducitur manifestè, conoidea omnia in serie principalium, & omnes parabolas in tota serie fore magnitudines proportionaliter analogas, tàm in ratione magnitudinis, quàm grauitatis, tàm secundum totum, quàm secundum partes proportionales. Vndè si aliquando reperiemus centra grauitatis parabolarum omnium in tota serie (quod vti-

que statim explebimus) assignabimus quoque centra grauitatis conoideorum in serie principalium, non quidem tantum quorum numeri sunt pares, vt fecimus in proposit. 14. lib. 4. sed etiam quorum numeri sunt impares. Quòd numquam in nostris operibus ante elaboratis præstitimus.

PROPOSITIO II.

Centra grauitatis, tàm infinitarum parabolarum, quàm infinitorum trilineorum in tota serie, sic diuidunt eorum axim, vt pars terminata ad verticem, sit ad aliam, vt parallelogrammum ipsis circumscriptum, ad ipsas figuras.

HÆc propositio facilè patet ex dictis in libris alijs de Infinitis Parabolis. Nam proposit. 12. lib. 2. verificatur etiam de his figuris, quia sunt eiusdem indolis cum illis. Proposit. 1. lib. 3. est vniuersalissima. Quare etiam proposit. 2. facilè applicata his figuris præstabit propositum.

SCHOLIVM I.

Ex schol. ergo 2. proposit. anteced. poterimus statuere, centrum grauitatis infinitarum parabolarum totius seriei sic diuidere earum axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt numerus binario auctus ad numerum. Item centrum grauitatis infinitorum trilineo-

lineorum totius seriei diuidere axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt numerus binario auctus ad binarium.

Cum verò quodlibet conoides in tota serie sit probatum proportionaliter analogum cum parabola; cuius numerus sit subduplus sui numeri in tota serie: cumque talia conoidea sint omnia ea, quorum numeri sunt pares: nempe omnia ea, quæ constituunt seriem principalium: omnium horum habebimus centra grauitatis. Ad quæ assignanda mirabiliter inseruiunt omnes infinitæ parabolæ totius seriei. Trilineum ergo parabolicum quadraticum inseruiet inuentioni centri grauitatis coni. Triangulum, conoidis parabolici quadratici. Parabola media inter triangulum & parabolam quadraticam, conoidis cubici. Et sic in reliquis. Secabitur ergo sic axis cuiuslibet conoidis, cuius numerus par in tota serie à suo centro grauitatis, vt pars terminans ad verticem sit ad reliquam, vt dimidium eius numeri auctum binario, ad dimidium numeri (quia numerus parabolæ cum ipso proportionaliter analogæ est subduplus numeri ipsius.) Cumque numerus eius subduplus in tota serie sit eius numerus in serie principalium, vt supra explicatum fuit, & vt clarissimè patet. Hinc vniuersaliter, breuiterque licebit statuere.

Centrum grauitatis cuiuslibet conoidis seriei principalis diuidit axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt numerus conoidis binario auctus ad numerum.

merum. In cono, vt 3. ad 1. in quadratico vt 4. ad 2. In cubico, vt 5. ad 3. Et sic in infinitum.

SCHOLIVM II.

Hic liceret ampliare multas doctrinas expositas in nostris quatuor libris de Infinitis Parab. & in alijs nostris operibus. Quæ omnia consultò remittimus diligentiæ lectorum. Nos in præsenti tantum aliqua principalia adnotabimus.

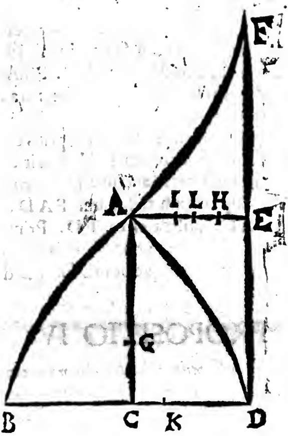
PROPOSITIO III.

Centrum æquilibrij cuiuslibet semiparabolæ in tota serie appensæ secundum basim, sic ipsam diuidit, vt pars terminans ad curuam, sit ad terminatam ad axim, vt numerus senario auctus, ad numerum binario auctum.

HÆc propositio deducetur ex pulcherrima propofit. 20. exercit. 5. Caualerij, ex qua deduxit centra æquilibrij in basibus infinitarum semiparabolarum principalium. Propositio autem Caualerij talis est.

Si H, sit centrum grauitatis duplicati trilinei F A D, seu æquilibrij A E D, appensi secundum A E, & D C, sic diuidatur in K, vt sit sicut A E, cum E H, ad A H, sic D K, ad K C. K, erit centrum æquilibrij semiparabolæ A D C, appensæ secundum D C. Cum enim ex schol. 1. proposit. anteced. sit A H,

ad



ad HE, vt numerus binario auctus ad binarium: erit AE, cum EH, ad AH, vt numerus ſenario auctus ad numerum binario auctum. Et ſic etiam erit Dk, ad kC.

SCHOLIVM.

Sicuti ex generali proposit. 4. lib. 3. libet inferre, quòd si semiparabola C A D, totius seriei rotetur prius circa E D, deinde circa A C. Primum solidum erit ad secundum, vt numerus senario auctus, ad numerum binario auctum.

Si verò parabola B A D, rotetur prius circa A E, deinde circa B D. Primum solidum erit ad secundum, vt numerus binario auctus ad numerum.

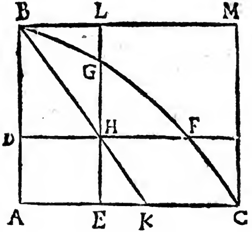
Si autem duplicatum trilineum F A D, gyretur prius circa A C, postea circa F D. Primum solidum erit ad secundum, vt numerus binario auctus, ad binarium. Hæc namque omnia sunt, ex dictis, nimis clara.

PROPOSITIO IV.

Cylindrus circumscriptus cuilibet infinitorum conoideorum in tota serie, est ad ipsum, vt numerus quaternario auctus, ad numerum. Ad solidum verò ortum ex reuolutione semiparabolæ circa latus rectanguli, sibi circumscripti, axi parallelum, vt numerus rectanguli sub numero binario aucto, & sub numero quaternario aucto, ad numerum rectanguli sub numero, & sub numero senario aucto.

HÆc propositio probari potest, & ad modum proposit. 15. libro 2. & ex proposit. 3. lib. 3.

Pro-



Probabimus autem ipsam ex ipsa proposit. 3. Sit ergo quælibet semiparabola A B C, totius seriei, cui sit circumscriptum rectangulum A M, & sit E, centrum æquilibrij semiparabolæ A B C, appensæ secundum basim A C. Ex doctrina ergo tradita in dicta proposit. 3. cylindrus ex A M, circa A B, ad conoides, habet rationem compositam ex ratione rectanguli A M, ad semiparabolam, & ex ratione dimidiæ A C, ad A E. A M, ad A B C, est vt numerus binario auctus ad numerum, ex schol. 2. proposit. 1. Dimidia A C, est ad A E, vt numerus quaternario auctus ad numerum binario auctum, ex proposit. anteced. Ergo cylindrus ad conoides erit in ratione ex his composita. Nempe, propter commune latus numerum binario auctum, vt numerus quaternario auctus, ad numerum. Quod &c.

Secunda pars facilè patebit ex eadem proposit. Cylindrus namque ex AM, circa MC, ad solidum ex ABC, circa CM, est in ratione composita ex AM, ad ABC (nempe numeri binario aucti ad numerum) & ex ratione dimidiæ AC, ad EC (nempe numeri quaternario aucti ad numerum senario auctum.) Sed ex prædictis rationibus componitur quoque ratio rectanguli sub numero binario aucto, & sub numero quaternario aucto, ad rectangulum sub numero, & sub numero senario aucto. Ergo patet propositum.

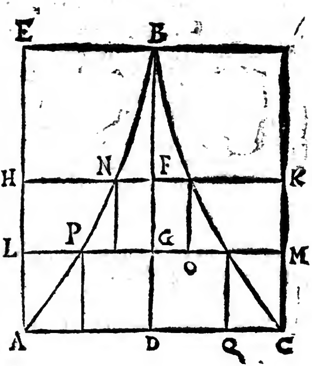
SCHOLIVM.

Ex prima parte ergo præsentis propositionis elicitur, quod per conuersionem rationis, erit cylindrus ex AM, ad sui excessum supra conoides, nempe ad solidum ortum ex reuolutione trilinei BMC, circa BA, vt numerus quaternario auctus ad quaternarium.

PROPOSITIO V.

Cylindrus circumscriptus cuilibet infinitorum conicorum, est ad ipsum, vt parallelogrammum circumscriptum trilineo, cuius numerus sit duplus numeri conici, ad ipsum trilineum, tàm secundum totum, quàm secundum partes proportionales.

Hæc



HÆc propoſitio probabitur ad modum propoſit.4. lib.4. Conicus ſit A B C, cum cylindro circumſcripto E C; & pariter, pro confuſione vitanda, ſupponamus A B D, eſſe aliud trilineum cum rectangulo E D, circumſcripto, cuius numerus ſit duplus conici. Dico eſſe cylindrum ad conicum, vt rectangulum ad trilineum. Accipiatur arbitrariè punctum F, & in conico tranſeat planum H K, in trilineo linea H F, quæ omnia ſint parallela, illud plano A C, hæc lineæ A D, iuxta conſuetum.

tum. In conico eſt vt poteſtas DB, congruens conico, ad ſimilem poteſtatem BF, ſic HF, ad FN. Similiter ſic in trilineo. Sed cum numerus trilinei ſit duplus numeri conici, etiam poteſtas DB, congruens trilineo erit duplicata poteſtatis DB, congruentis conico. Quare etiam ratio HF, ad FN, in trilineo, erit duplicata rationis HF, ad FN, in conico. Cum verò ſit vt poteſtas DB, congruens trilineo ad ſimilem poteſtatem BF, ſic AD, ſeù HF, ad FN. Ergo etiam vt quadratum HF, ad quadratum FN, in conico (ſeù vt circulus radij HF, ad circulum radij FN, in conico) ſic HF, ad FN, in trilineo. Et ſic vbilibet. Facilè ergo concludetur propoſitum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Cum ergo ex ſchol. 2. propoſit. 1. ſit rectangulum ad quodlibet trilineum totius ſeriei, vt numerus binario auctus ad binarium; & cum numerus trilinei ſupponatur duplus numeri conici, poterimus ſtatuere. Fore cylindrum ad conicum totius ſeriei, vt duplus numerus binario auctus, ad binarium. Seu vt numerus vnitate auctus ad vnitatem. Et per conuerſionem rationis, erit cylindrus ad annulos ortos ex reuolutione ſemiparabolarum AEB, circa BD, parallelam baſi EA, vt numerus vnitate auctus ad numerum.

SCHO-

SCHOLIVM II.

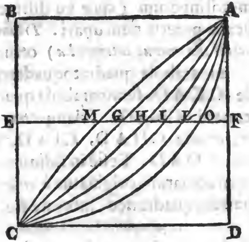
Sed & imitando exposita in nostris operibus, infinita possent deduci de his infinitis parabolis totius seriei. Quæ omnia, lector proprio poterit marte experiri, si obseruauerit modos, quibus vsi sumus ad ea omnia probanda. Nos namque tantum exposuimus ea, ex quibus percipi potest admirabilis analogia in his magnitudinibus reperta, quam lectorem cupimus diligenter ad memoriam reuocare. Inferiùs namque habebit, vndè delectabiliter mysteria geometrica admiretur. Consideret ergo lector, qualiter quadratura parabolarum principalium inseruiat mensuris omnium conoideorum principalium. Sed cum facilè teneamus centra grauitatis parabolarum principalium; & cum hæ sint proportionaliter analogæ cum conoidibus principalibus, quorum numeri sunt pares: tenebimus etiam horum centra grauitatis. Porrò omnia conoidea principalia sunt proportionaliter analoga cum omnibus parabolis totius seriei; ergo habita mensura omnium conoideorum principalium ex quadratura parabolarum principalium, habebimus etiam quadraturas omnium parabolarum in tota serie. Habitis quadraturis omnium harum, habebimus etiam tàm centra grauitatis ipsarum, quam æquilibrij ipsarum dimidiarum secundum basim appensarum. Ex quadraturis ipsarum, & ex prædictis centris æquilibrij, tenebimus mensu-

ras

ras omnium conoideorum ex ipsis genitorum. Porrò cum omnes hæ parabolæ totius seriei sint proportionaliter analogæ cum omnibus conoidibus principalibus: omnium horum tenebimus centra grauitatis. Sed hucusque non habebimus centra grauitatis omnium conoideorum totius seriei, nempe intermediorum. Ast quo pacto etiam hæc deducantur, nunc est explicandum.

SCHOLIVM III.

Initio ergo tradidimus qualiter inueniantur semiparabolæ intermediæ. Diximus enim, quòd si v. g. C O A D, sit trilineum parabolicum quadraticum, & C G A D, triangulum, vt acta E F, parallela C D, sint tres continuè proportionales E F, F G, F O, & tam ratio E F, ad F G, quàm G F, ad F O, subduplicetur in I, & M, & idem dicatur accidere de alijs parallelis C D, & intelligamus diagonales C I A, C M A: diximus inquam, haberi duplam seriem infinitam; nimirum infinitorum trilineorum, & infinitarum semiparabolarum. Quælibet ergo proportio radicalis est subduplicata. Modò iterum quælibet hæc subduplicata subduplicetur, vt quælibet talis proportio sit subquadruplicata radicalis. V. g. ratio radicalis G F, ad F O, quam habet ordinatim applicata in triangulo, ad ordinatim applicatam in trilineo parabolico quadratico, est subduplicata in I, per diagonalem intermedium C I A; tàm



tàm ergo ratio GF, ad FI, ſubduplicetur per diagonalem CHA, quàm ratio IF, ad FO, ſubduplicetur per diagonalem CLA. Idem intelligamus de alijs rationibus radicalibus, & intermedijs in altioribus trilineis. Habebimus etiam modò duas infinitas ſeries, trilineorum nempe, & ſemiparabolarum, ampliores iam explicatis. Quæ tamen ſeries nondum ſunt complete regulatæ. Regulabuntur autem perfectè ſi etiam rationes EF, ad Fk, dimidia in ſequenti ſchemate rationis EF, ad FG, & FK, ad FG, ſubduplicentur per diagonales CMA, & CNA. CMAD, enim erit ſemiparabola quadratoquadratica, & CNAD, intermedia inter triangulum, & ſemiparabolam quadraticam (cuius natura nondùm innotuit, ſed infra explicabitur) &

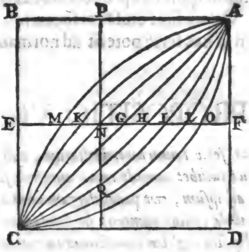
D harum

harum erunt axis A D, basis C D. Series ergo totalis horum trilineorum (quæ ad distinctionem prius explicatæ poterit nuncupari. *Trium intermediarum, veluti illa vnius intermediæ*) ortum ducit à C M A D, semiparabola quadratoquadratica. Succedit deinde C K A D, semiparabola quadratica. Postea intermedia C N A D. Triangulum C G A D. Trilinea intermedia C H A D, C I A D, C L A D, quadraticum C O A D. Et sic in infinitum. Series autem semiparabolarum originatur à trilineis quadratoquadratico, quadratico, intermedio, triangulo &c.

In hac serie trium intermediarum tàm trilinea, quàm parabolæ seriei vnius intermediæ antecedentis habebunt omnes numeros pares, & duplos eorum, quos occupabant in serie vnius intermediæ. Parabolæ autem, & trilinea seriei principalis habebunt pariter omnes numeros pares, & quadruplos illorum quos habebant in serie principalium. Quod vnicuique patebit faciliter.

SCHOLIVM IV.

Porrò naturam semiparabolæ C N A D, sic indagabimus. Supponamus C L A D, esse trilineum quadraticum, & ratio G F, ad F L, subtriplicetur in H, vt F H, sit maior duarum mediarum inter G F, F L, terminos proportionis æqualis radicali; & intelligamus diagonalem C H A. Semiparabo-



la CNAD, erit eiuſdem ſpeciei cum ſemiparabola CHAB. Cum enim inter EF, FG, ſint tres mediæ MF, FK, FN, ratio EF, ſeù CD, ad NF, erit ſubſeſquitertia proportionis radicalis CD, ad GF, ſeù DA, ad AF. Pariter cum ratio GF, ad FH, ſit ¼. proportionis radicalis; erit proportio EF, ad FH, ſeſquitertia proportionis radicalis EF, ad FG, ſeù DA, ad AF. Quare DA, ad AF, conuertendo, (nempe CB, ordinatim applicata in ſemiparabola CHAB,) ad FA, (æqualem ordinatim applicatæ in eadem ſemiparabola à puncto H) erit in ſubſeſquitertia proportione EF, ſeù BA, axis eiuſdem, ad HF, æqualem portioni axis, quam abſcindit ordinatim applicata à puncto H. Sed & ſupra CD, ad NF, or-

dinatim applicatam in semiparabola CNAD, est probata in subsesquitertia proportione axis DA, ad axim AF. Quare sunt eiusdem speciei.

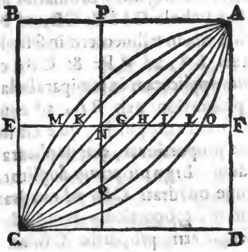
Ast etiam in hac serie poterit ad normam propos. 1. proponi.

PROPOSITIO VI.

Etiam in tota serie trium intermediarum, cylindrus circumscriptus cuilibet conoidi cuius numerus sit numerus par, erit ad ipsum, vt parallelogrammum circumscriptum parabolæ, cuius numerus sit subduplus numeri conoidis, ad ipsam: & hoc tàm secundum totum, quàm secundum partes proportionales.

HÆc verò propositio constabit eodem modo, quo supra patuit proposit. prima. Quapropter omittitur demonstratio. Solum aliqua potest esse difficultas à triangulo infra, non à triangulo supra; & in hac non à trilineis CMAB, quadratoquadratico, & CkAB, quadratico (in his enim tàm in proposit. 4. lib. 4. quàm in proposit. anteced. patuit fore rectangulum DB, ad trilineum CMAB, vt cylindrus ex DB, ad conicum ex CkAB, reuolutis omnibus circa BA, diametrum.) Sed solum in trilineo CNAB, ex semiparabola CNAD. Hoc enim, iuxta hanc regulam, deberet esse proportionaliter analogum cum conoide ex semiparabola CIAB, reuoluta circa suum axim BA, (sup-

po-



ponendo hanc esse vnicam mediam iam supra explicatam inter triangulum, & semiparabolam quadraticam, hoc est rationem GF, ad FI, esse dimidiatam radicalis EF, ad FG, & rationem EF, ad FI, sesquialteram radicalis.) Sed hoc verum esse facilè deducetur. Nam, ex dictis supra, proportio CD, ad NF, est subsesquitertia proportionis DA, ad AF. Conuertendo ergo, DA, seù CB, basis trilinei CNAB, erit ad FA, seù NP, ordinatim applicatam in ipso à puncto N, in sesquitertia proportione CD, seù BA, axis eiusdem, ad NF, seù PA, portionem axis abscissam versus verticem ab eadem ordinatim applicata. Pariter quoniam CI, AB, supponitur semiparabola media inter triangulum, & quadraticam, ordinatim applicatæ erunt ad

inui-

inuicem in subsesquialtera proportione partium axis. Si ergo intelligamus ordinatim applicatam QP, in semiparabola CIAB; CB, ad NP, ordinatim applicatam in trilineo, erit in sesquitertia proportione axis BA, ad AP: & CB, eadem erit ad ordinatim applicatam in semiparabola in subsesquialtera proportione axis BA, ad eundem axim AP. Cæterum ea proportio, quæ est subsesquialtera alicuius proportionis, eius duplicata est sesquitertia eiusdem. Ergo proportio duplicata CB, ad QP (nempe quadrati CB, ad quadratum QP) erit sesquitertia proportionis BA, ad AP. Sed & huius sesquitertia proportio CB, ad NP. Ergo vt CB, ad PN, sic quadratum CB, ad quadratum QP. Ex quibus expertus in methodo Caualeriana indiuisibilium deducet propositum.

SCHOLIVM I.

Etiam ergo scholia apposita propositioni primæ ritè poterunt huic adiungi. Porrò cum omnia hæc conoidea quorum exponentes in tota serie trium intermediarum sunt numeri pares, sint omnia conoidea totius seriei vnius intermediæ; & cum omnium horum mensuræ supra fuerint explicatæ: consequenter tenebimus quadraturas omnium harum parabolarum; earum centra grauitatis; & æquilibrij in basibus. Et consequenter mensuras omnium conoideorum, & omnia supra exposita.

SCHO-

SCHOLIVM II.

Nunc cogitemus quamlibet rationem huius seriei subduplicari, seù rationem radicalem sub octupli-cari per septem diagonales intermedias. Tenebimus binas series, quæ *Septem intermediarum appellitari poterunt*. Et sic licebit in infinitum procedere subduplicando rationem seriei antecedentis. Sic namque infinitè infinitas series trilineorum, & parabolarum procreabimus, sic vt series infinitorum trilineorum ortum ducant à semiparabolis, quarum prima in serie principalium occupabit numerum vnitate excedentem numerum terminorum per quos diuiditur ratio radicalis. Series verò infinitarum semiparabolarum incipient à trilineis eiusdem rationis cum semiparabolis, à quibus ortum ducebat series trilineorum.

Verum solidorum omnium ex his figuris genitorum tenebimus mensuras, & centra grauitatis. Et verbo, omnia, quæ in nostris operibus antea elaboratis probata ac patefacta fuere de his figuris, vel solidis principalibus, poterunt suo modo applicari ijs harum serierum. Quæ tamen omnia libenter omittimus. Solum assignabimus regulas generales circa aliqua, quorum notitia deinceps indigebimus.

Prima regula generalis, quam vnusquisque poterit experiri talis est.

Re-

Rectangulum circumſcriptum cuilibet ex infinitis parabolis ſupra explicatis, eſt ad ipſam, vt numerus quem ipſa occupat in ſua ſerie, auctus tot vnitatibus vna plus quot ſunt mediæ, per quas ſecatur ratio radicalis, ad ipſum numerum. V. g. ſi nulla ſit media, ſed ſeries ſit principalium, vt numerus vnitate auctus, ad numerum. Si vna ſit intermedia, vt numerus binario auctus ad numerum. Si tres ſint intermediæ, vt numerus quaternario auctus ad numerum. Et ſic in infinitum.

Secunda regula. Ergo per conuerſionem rationis. Erit rectangulum ad quodlibet ex infinitis trilineis, vt idem antecedens ad numerum ipſarum mediarum vnitate auctum.

Tertia regula. Centra grauitatis dictarum figurarum ſecant earum axes, vt partes ad verticem ſint ad partes ad baſim in proportionibus explicatis in duabus regulis ſuperioribus.

Quarta regula, quæ facilè deducetur ex explicatis in ſchol. 2. propoſit. 2. lib. 3. ex aurea doctrina Caualerij, eſt. Quòd centrum æquilibrij cuiuslibet ſemiparabolæ explicatæ appenſæ ſecundum baſim, ſic ipſam diuidit, vt pars terminans ad curuam, ſit ad terminatam ad axim, vt numerus, quem ipſa occupat in ſua ſerie auctus tribus vicibus, tot vnitatibus vna plus, quot ſunt mediæ per quas ſecatur ratio radicalis, ad ipſum numerum auctum ijſdem vnitatibus ſemel ſumptis. V. g. ſi nulla ſit media, vt numerus tribus vnitatibus auctus ad numerum vnitate auctum.

ctum. Si vna, vt numerus senario auctus, ad numerum binario auctum. Si tres, vt numerus duodenario auctus, ad numerum quaternario auctum. Et sic in infinitum.

Quinta regula, quæ paruo labore probabitur ad normam proposit. 4. ex proposit. 3. lib. 3. est. Cylindrum circumscriptum cuilibet conoidi fore ad ipsum, vt numerus conoidis auctus duabus vicibus tot vnitatibus vna plus, quotus est numerus intermediarum, ad ipsum numerum. Et per conuersionem rationis, fore ad sui excessum supra ipsum, vt dictum antecedens ad excessum supra consequens.

Sexta regula, quæ facilè deducetur ex proposit. 5. & ex regula 2. est. Fore cylindrum circumscriptum cuilibet conico ad ipsum, vt duplus numerus conici auctus tot vnitatibus vna plus, quotus est numerus intermediarum, ad has easdem vnitates. Et per conuersionem rationis, fore ad annulum ex semiparabolis reuolutis circa latus basi parallelum, vt idem antecedens ad duplum numerum.

Septima, & vltima regula est. Quòd centrum grauitatis cuiuslibet ex infinitis conoidibus sic diuidit eius axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt numerus quem ipsum occupat in sua serie, auctus tot vnitatibus vna plus, quot sunt mediæ per quas secatur ratio radicalis proportionis subduplæ proportionis conoidis, ad ipsum numerum. V. g. si conoides sit seriei principalis, vt numerus binario auctus ad numerum. Quia ratio proportionis subduplæ seca-

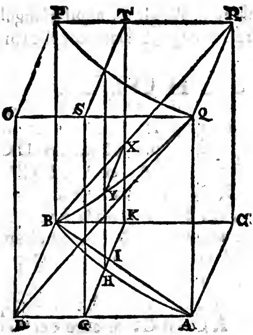
tur per vnam mediam. Si conoides sit seriei vnius intermediæ, vt numerus quaternario auctus ad numerum. Si conoides sit seriei trium intermediarum, vt numerus octonario auctus ad numerum. Et sic in infinitum.

Verùm hîc haud est sistendum, sed vlteriùs progrediendo, alias infinitè infinitas parabolas, infinitaue trilinea procreabimus, quorum omnium pariter ostendemus mensuras, centra grauitatis, cæteraque symptomata hucúsque excogitata. Sed ante omnia recipiatur seques doctrina.

PROPOSITIO VII.

Sit AHBC, qualibet figura deficiens ad partes B, cuius diameter BC, basis AC, rectangulum circumscriptum DC, & sint AIBC, CBMF, quæcunque figuræ pariter deficientes ad partes B, sed eiusdem speciei, quarum diameter BC, & ducta GN, vbilibet parallela AF, sit vt GK, ad KH, sic MK, ad KL. Erit NK, ad KL, (si EC, sit rectangulum figuræ CBMF, circumscriptum) vt quadratum GK, ad rectangulum HKI.

PAtet, quia hæ proportiones componuntur ex ijsdem proportionibus. Nam Nk, ad kM, est vt GK, ad kI, propter figuras AIBC, CBMF, eiusdem speciei. Vt verò Gk, ad kH, sic Mk, ad kL. Ast proportio Nk, ad kL, com-



componitur ex proportionibus NK, ad kM, & kM, ad kL. Et proportio quadrati GK, ad rectangulum HKI, componitur ex proportionibus Gk, ad kH, & Gk, ad kI. Quare patet propositum.

SCHOLIVM I.

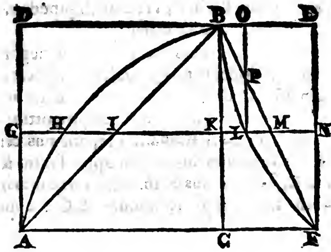
Si ergo intelligamus in DF, esse ductas infinitas GN, basi AF, parallelas, & per omnia puncta L, transire curuam BLF, facilè patebit rectangulum

E C, fore ad figuram C B L F, vt parallelepipedum cuius basis D C, altitudo A C, ad solidum cuius vnum planum A H B C, aliud triangulum A I B C. Quod statim magis, & clariùs explicabitur.

SCHOLIVM II.

Cogitemus in schemate sequenti tàm super figura A H B C, quàm super rectangulo D C, extare cylindricos rectos P A, & P Q R C A B, quorum altitudo R C, sit æqualis A C, basi figurarum A H B C, A I B C, (quam in præcedenti supponamus esse triangulum,) & cogitemus omnia hæc solida secta plano diagonali R B D Q. Parallelepipedum secabitur in duo prismatata, & cylindricus super figura A H B C, in duos truncos, quorum inferior erit R Q B A C. Si ergo per G k, intelligamus transire planum parallelum plano R A, hoc secabit tàm parallelepipedum, quàm truncum inferiorem cylindrici super figura A H B C. Et planum S k, in parallelepipedo erit quadratum ipsius G k (quia æquale plano Q C, quod propter æqualitatem rectarum R C, C A, est quadratum.) Planum verò H Y X k, in trunco, erit rectangulum, quod fit ex H K, in k I, (quia k I, æqualis k X, cum triangula A I B C, C B R, sint æqualia in omnibus, & per omnia.) Cum ergo in propositione, sit probatum in schemate antecedenti, fore N k, ad k L, vt quadratum G K, ad rectangulum H K I; (nempe vt

qua-



quadratum GT, ad rectangulum YK, in schemate præsenti:) facilè constabit fore rectangulum EC, ad figuram CBLF, vt parallelepipedum OC, ad ipsum truncum inferiorem RQBAC.

Quod si cogitemus AIBC, seù BFC, non fore triangulum, sed quodlibet ex infinitis trilineis, vel quælibet figura, adeò vt BXRC, sit trilineum, vel figura AIBC, æqualis, & intelligamus truncum inferiorem BXRCAQ, secari superficie non recta vt prius, sed curuata, vt truncus inferior sit, vel pars trunci inferioris prioris, vel totum, respectu ipsius, secundum quod figura AIBC, est vel maior, vel minor triangulo: nihilominus constabit esse KX, æqualem kI; & rectangulum YK, æqua-

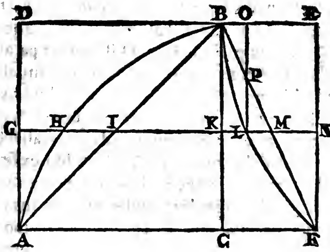
quale fore rectangulo HkI. Et eodem modo patebit fore, in schemate primo, rectangulum EC, ad figuram BLFC, vt parallelepipedum PA, ad dictum truncum inferiorem.

Amplius autem manifestè, nulloque negotio patebit ex nostris doctrinis generalibus explicatis, esse figuram BLFC, dicti primi schematis, & truncos inferiores explicatos, magnitudines proportionaliter analogas. Vndè si aliquando reperiemus centra æquilibrij dictarum figurarum appensarum secundum BC, habebimus etiam centra æquilibrij præfatorum truncorum secundum BC, appensorum.

PROPOSITIO VIII.

Si sint eadem, quæ in propositione anteced. & in primo suo schemate CBMF, sit triangulum, & proportio MK, ad KL, sit vtcumque submultiplicata proportionis radicalis NK, ad KM, nempe sit quælibet fractio illius. Erit rectangulum EC, ad trilineum BLFC, vt duplus numerus denominatoris dictæ fractionis vnitate auctus, ad ipsum numerum denominatoris.

PRopositio hæc indiget explicatione. Intelligimus autem sic, quod si Mk, ad kL, sit in subduplicata ratione Nk, ad kM, vt talis proportio sit ½ radicalis, rectangulum erit ad trilineum, vt 5. ad



ad 2. Si ſit in ſubtriplicata, nempe $\frac{1}{3}$. erit vt 7. ad 3. Si in ſubquadruplicata, nempe $\frac{1}{4}$. vt 9. ad 4. Et ſic in infinitum.

Exponatur namque ſemiparabola AHBC, cum triangulo AIBC, vt in propoſit. anteced. vt GK, ſit ad kH, vt Mk, ad kL. Nempe ſi proportio Mk, ad kL, ſit ſubduplicata radicalis, ſemiparabola ſit quadratica: ſi ſubtriplicata, cubica: ſi ſubquadruplicata, ſit quadratoquadratica: & tàm ſuper ipſa, quàm ſuper rectangulo DC, circumſcripto cogitemus cylindricos eos, quos ſupra explicauimus, & ſectos eodem modo. Iam conſtat ex dictis, eſſe rectangulum ad trilineum, vt parallelepipedum ad truncum inferiorem. Porrò ex doctrinis generali-

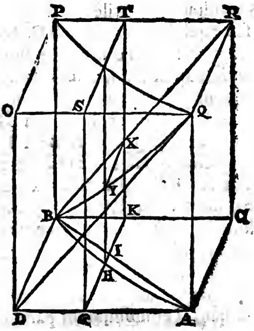
bus

bus assignatis in schol. 3. proposit. 10. lib. 2. cum sit vt prisma, quod est dimidium parallelepipedi P A, ad dictum truncum inferiorem, sic cylindrus ex DC, rotato circa DB, ad solidum ex semiparabola AHBC, rotata pariter circa DB: erit vt parallelepipedum ad dictum truncum, seù vt rectangulum CE, ad trilineum BLFC, sic duplus cylindrus ex DC, ad dictum solidum ex semiparabola. Sed ex proposit. 14. lib. 2. & ex sexta regula generali supra explicata, est cylindrus ex DC, ad solidum ex semiparabola, vt numerus auctus dimidia vnitate ad numerum; & duplus cylindrus, vt duplus numerus vnitate auctus ad numerum. Erit ergo etiam rectangulum CE, ad dictum trilineum, vt duplus numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Sed numerus parabolæ in serie principalium idem est cum numero denominatoris fractæ proportionis Mk, ad KL. Quare patet propositum. Quod &c.

COROLLARIVM.

Ergo per conuersionem rationis, erit rectangulum ad has infinitas semiparabolas BLFE, vt antecedens dictum, ad numerum denominatoris vnitate auctum. Nempe vt 5. ad 3. vt 7. ad 4. &c.

SCHO-



SCHOLIVM I.

Habemus ergo duplicatam feriem infinitam, trilineorum, & parabolarum, & horum omnium habemus quadraturas dependenter à quadraturis principalium. Quia ex quadraturis ſemiparabolarum principalium AHBC, dependent rationes, quas habent cylindri ex DC, circa DB, ad annulos ex ijſdem ſemiparabolis rotatis circa eandem BD. Ex quibus in præſenti propoſit. deducimus quadratu-

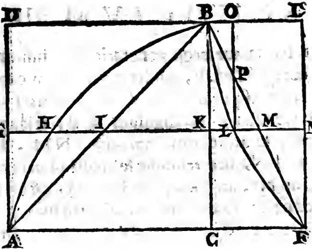
ras tàm infinitorum trilineorum CBLF, quàm infinitarum ſemiparabolarum FLBE.

Habitis quadraturis, facilè erit aſſignare centra grauitatis ſeu æquilibrij in axibus BC, BE, dictarum figurarum. Nec non centra æquilibrij in baſibus EF, infinitarum ſemiparabolarum. Ex quibus,& ex ipſarum quadraturis, paruo labore, aſſequemur rationes cylindrorum ex BF, circa BE, ad infinita conoidea ex ſemiparabolis BLFE, circa BE. Pariter facilè erit aſſignare rationes cylindrorum ex BF, circa BC, ad annulos ex ijſdem ſemiparabolis reuolutis circa BC. Hæc enim omnia abſque ſudore determinabuntur in menſuris, & regulis generalibus ad normam antecedenter expoſitorum. Hoc idem intelligendum veniet quotieſcunque aſſignabimus quadraturas aliorum infinitorum trilineorum, vel infinitarum parabolarum. Quod cupimus animaduerti, ne idem, cum lectorum tædio, repetere cogamur.

SCHOLIVM II.

Habemus ergo quadraturas infinitorum trilineorum, in quibus ratio ordinatim applicatæ CF, vel NK, ad ordinatim applicatam KL, eſt in ſeſquialtera, in ſeſquitertia, in ſeſquiquarta, in ſeſquiquinta (& ſic in infinitum) ratione radicalis NK, ad kM. Cum enim ratio Mk, ad kL, ſit $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ &c. radicalis; ratio NK, ad KL, erit $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{5}$ eiuſdem

radi-



radicalis NK, ad kM, vel CB, ad Bk. Et consequenter si à puncto L, ordinatim applicetur LO, ad diametrum in semiparabola BLFE: erit CB, ad Bk, hoc est ordinatim applicata FE, ad ordinatim applicatam LO, in subsesquialtera, in subsesquitertia, in subsesquiquarta, &c. proportione EB, ad BO, seu FE, ad OP.

Si ergo ratio EB, ad BO, statuatur tamquam radicalis, habebimus seriem infinitarum semiparabolarum FLBE, in quibus rationes ordinatim applicatarum EF, LO, &c. erunt subsesquialteræ, subsesquitertiæ, &c. rationum diametrorum EB, BO. Veluti prius in serie principalium erant tales

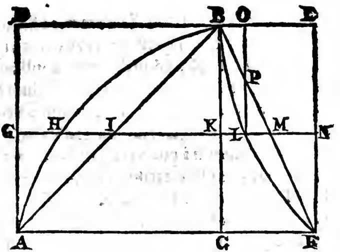
rationes ſubduplicatæ, ſubtriplicatæ, ſubquadruplicatæ, &c. earundem.

SCHOLIVM III.

Proſequamur ergo generationem infinitorum trilineorum CBLF, modis quos ſtatim explicabimus. Primuſque ſit talis. Concipiamus (vt etiam ſupra fecimus) rectangulum CE, triangulum BMFC, & ordinatim applicatam N M^k, & ratio M^k, ad kN, ſit vtcunque ſubmultiplicata rationis radicalis N^k, ad ^{k}M, ſed taliter, vt numerator fractionis ſit quilibet numerus à binario incipiens, denominator verò excedat ipſum vnitate. Nimirum ſit $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ &c. Sic procreabimus aliam ſeriem infinitorum trilineorum, quorum quadraturas pariter aſſignabimus.

Vt ergo quadraturæ C^{B}LF, infinitorum trilineorum deducantur, ſit rectangulum DC, cum triangulo AIBC, & cum ſemiparabola AH^{B}C, in quibus ordinatim applicatis G^K, ſit G^k, ad ^{K}H, vt M^k, ad ^{k}L. Nimirum ſi ratio M^k, ad ^{k}L, ſit $\frac{2}{3}$ radicalis, etiam parabola AHBC, ſit ea, in qua ratio ordinatim applicatæ AC, ad ordinatim applicatam Hk, ſit ſubſeſquialtera rationis axis CB, ad Bk. Et ſic in alijs. Ad modum ſuperiorum conſtabit, fore vbique Nk, ad kL, vt quadratum Gk, ad rectangulum HkI. Et ſi ſuper DC, AHBC, concipiantur cylindrici recti PA, &c. ſecti vt ſupra

fa-



factum fuit. Nihilominus constabit fore rectangulum E C, ad trilineum C B L F, & vt parallelepipedum P A, ad truncum inferiorem cylindrici existentis super semiparabola; & vt duplus cylindrus ex D C, circa D B, ad annulum ex A H B C, circa eandem D B. Ast quum ratio dicti cylindri, ad dictum annulum haberi posse faciliter, statutum sit supra in schol. 1. Consequenter quadraturæ tàm infinitorum trilineorum C B L F, quàm infinitarum semiparabolarum F L B E, haud erunt occultæ. Nec non omnia indè consequentia.

SCHO-

SCHOLIVM IV.

Rursus ergo tenemus quadraturam infinitorum trilineorum CBLF, in quibus ratio ordinatim applicatæ CF, vel NK, ad ordinatim applicatam kL, est $\frac{5}{3}\ \frac{7}{4}\ \frac{9}{5}\ \frac{11}{6}$ &c. rationis radicalis. Cum enim ratio Mk, ad kL, sit $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}$ &c. rationis radicalis, erit ratio NK, ad KL, eiusdem radicalis $\frac{5}{3}\ \frac{7}{4}\ \frac{9}{5}\ \frac{11}{6}$ &c. Et consequenter si à puncto L, ordinatim applicetur LO, ad semidiametrum BE, in semiparabola FLBE, erit ratio FE, ad LO, rationis EB, ad BO; $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ & sic in infinitum. Si ergo rursum ratio EB, ad BO, accipiatur tanquam radicalis, tenebimus seriem infinitam semiparabolarum FLBE, in quibus rationes ordinatim applicatarum erunt $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ rationum axium.

SCHOLIVM V.

Prosequatur ergo genesis infinitorum trilineorum sic. Sint omnia, quæ supra, sed ratio MK, ad KL, sit fractio proportionis radicalis $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ &c. Sic denuò procreabimus aliam seriem infinitorum trilineorum CBLF. Horum quadraturas hauriemus si supponamus omnia, quæ supra, sed semiparabola AHBC, sit talis naturæ, vt ratio GK, ad KH, sit rationis CB, ad BK, radicalis $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ &c. nimirum correspondeat rationi MK, ad KL. Deinde inse-

insequendo argumentationem veluti peregimus in schol. 3. obtinebimus intentum, mediantibus annulis ex infinitis semiparabolis AHBC, rotatis circa DB.

Habitis quadraturis trilineorum CBLF, tenebimus quadraturas infinitarum semiparabolarum BLFE, in quibus ratio ordinatim applicatarum erit aliqua series infinita fractionis radicalis; pariterque tenebimus omnia inde consequentia; præcipuè rationem cylindri ex BF, ad annulum ex semiparabola BLFE, rotata circa BC. Quare disposita semiparabola BLFE, vt est AHBC, & prosequendo generationem trilineorum CBLF, in quibus rationes MK, ad kL, sint fractiones radicalis correspondentes fractionibus ordinatim applicatarum in semiparabola AHBC: in infinitum quadrabimus infinita trilinea, & infinitas parabolas, deducemusque omnia ex ipsis quadraturis consequentia.

Porrò alio adminiculo curanda est quadratura aliorum infinitorum trilineorum, &c. Pro quo sit.

PROPOSITIO IX.

Sit CBMF, trilineum quodlibet, cum triangulo CBRF, & cum rectangulo EC, circumscripto, huius diameter sit CB, basis CF; sit pariter aliud rectangulum DC, cum triangulo AHBC; omnia sint secta GN, parallela AF; & in MK, sumatur quodlibet punctum

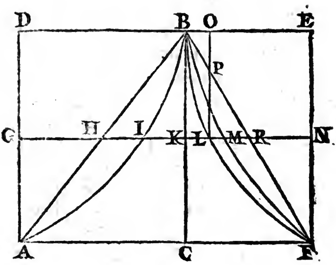
ctum L, & fiat vt RK, ad KL, sic GK, ad KI. Erit Nk, ad kL, vt quadratum Gk, ad rectangulum HkI.

PRopositio est facilis probatu. Quia hæ proportiones componuntur ex ijsdem proportionibus, vt clarè patet. Quapropter non demoramur.

SCHOLIVM I.

Si ergo intelligamus ductas fore infinitas GN, vt semper proportiones Mk, ad kL, sint eædem partes proportionum RK, ad kM, & proportiones singulæ RK, ad KL, sint æquales singulis proportionibus Gk, ad kI, & intelligamus per omnia puncta L, I, transire lineas BLF, AIB: facilè poterimus concludere, omnes lineas rectanguli EC, parallelas CF, fore ad omnes lineas trilinei CBLF, itidem parallelas CF, & rectangulum EC, ad trilineum CBLF, vt omnia quadrata DC, parallela, quadrato AC, ad omnia rectangula HkI, planorum AHBC, AIBC, itidem parallela quadrato AC: & vt parallelepipedum cuius basis DC, altitudo AC, ad solidum, cuius vnum planum trilineum AIBC, aliud triangulum AHBC.

Si ergo, vt factum fuit in schemate scholij 2. proposit. 7. concipiamus tàm super rectangulo DC, quàm super trilineo AIBC, cylindricos rectos æque-



quealtos, quorum altitudo CA, sectos vt ibidem factum fuit. Concludemus nihilominus fore vt EC, ad trilineum CBLF, sic parallelepipedum super DC, ad truncum inferiorem cylindrici super AIBC, cuius planum erectum super ipso, quorum communis sectio BC, erit triangulum AHBC. Nempe vt duplus cylindrus ex DC, circa DB, ad solidum ex trilineo AIBC, reuoluto circa DB.

SCHOLIVM II.

Propiùs ergo ad rem accedentes, supponamus CBMF, esse trilineum quadraticum, & rationem

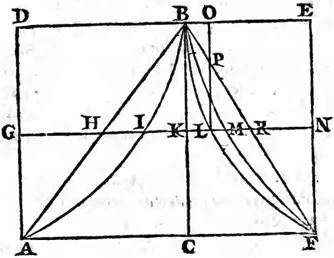
G Mk,

MK, ad kL, esse quamlibet fractionem radicalis, cuius numerator vnitas, nempe $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ &c. ergo ratio Rk, ad kL, erit $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}$ &c. rationis radicalis Rk, ad kM, vel Nk, ad KR. Et ratio Nk, ad kL, erit $\frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}$ &c. eiusdem radicalis Nk, ad kR. Pariter ratio Gk, ad kI, vtpotè æqualis rationi Rk, ad kL, erit $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}$ &c. rationis radicalis GK, ad kH, vel NK, ad KR. Trilinea ergo CBLF, AIBC, sunt diuersæ naturæ. Nam ratio CF, ad kL, est $\frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}$ &c. radicalis. Ratio verò AC, ad Ik, est $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}$ &c. eiusdem radicalis. Et quadraturas trilineorum CBLF, tenebimus ex proportione dupli cylindri ex DC, ad solidum ex trilineo AIBC, rotato circa DB. Sed ratio cylindri ad dictum solidum posse haberi traditum fuit supra in schol. 1. proposit. 7. Ergo habebimus etiam quadraturas tàm infinitorum trilineorum CBLF, quàm infinitarum semiparabolarum BLFE, cum omnibus indè dependentibus.

SCHOLIVM III.

Habemus ergo rursum alias infinitas semiparabolas FLBE, in quibus ratio FE, ordinatim applicatæ, ad ordinatim applicatam LO, est $\frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{9}$ &c. rationis EB, ad BO, seù FE, ad PO. Quæ ratio si sumatur tamquam radicalis, & continuentur inuentiones trilineorum, quorum mensuris inseruiant annuli ex semiparabolis BLFE, reuolutis circa

BC,



BC, vt factum, & explicatum fuit in scholijs propo-
sit. anteced. præcipuè in 5. tenebimus aliàs infinitè
infinitas series trilineorum, & parabolarum, qua-
rum rationes ordinatim applicatarum erunt fra-
ctiones rationis radicalis, quorum numeratores
erunt diuersi à iam traditis. Omnium etiam harum
figurarum tenebimus omnia symptomata exposita
de infinitis parabolis principalibus.

SCHOLIVM IV.

Pariter trilineum CBMF, sit trilineum cubi-
cum, & pariter sit ratio MK, ad kL, quælibet

fractio radicalis, cuius numerator vnitas. Ratio Nk, ad kL, erit $\frac{7}{2}\ \frac{10}{3}\ \frac{13}{4}$ &c. radicalis. Et ratio RK, ad kL, seù GK, ad kL, erit $\frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}$ &c. eiusdem radicalis. Cum verò in schol. anteced. traditum sit nos posse habere rationes cylindrorum ex DC, ad annulos ex AIBC, circa DB, traditæ pariter erunt quadraturæ infinitorum trilineorum CBLF, & omnia inde consequentia.

Habemus ergo rursus aliàs infinitas semiparabolas FLBE, in quibus rationes FE, ad LO, erunt $\frac{2}{7}\ \frac{3}{10}\ \frac{4}{13}$ &c. radicalium. Quæ parabolæ dispositæ secundum explicata, parient mensuras infinitè infinitarum seriem.

Eodem modò si trilineum CBMF, sit quadrato quadraticum, quadrato cubicum, &c. inueniemus mediantibus trilineis AIBC, ordinis inferioris, mensuras omnium trilineorum CBLF.

SCHOLIVM V.

Vniuersaliter ergo possumus statuere, annulum ex trilineo AIBC, reuoluto circa DB, inseruire mensuræ trilinei CBLF, in quo ratio ordinatim applicatæ CF, ad kL, sit eadem cum proportione composita ex ratione AC, ad HK, radicalem, & ex ratione eiusdem AC, ad kI. Vel possumus statuere, annulum dictum trilinei AIBC, parere mensuram illius trilinei CBLF, in quo ratio CF,

ad ^kL, excedat rationem AC, ad I^k, ratione radicali.

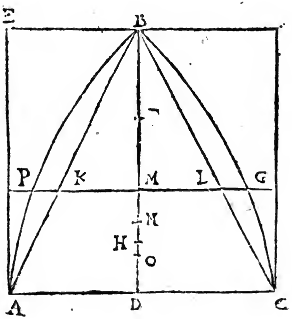
Istis artificijs putamus nos posse obtinere quadraturas omnium illarum parabolarum, in quibus rationes ordinatim applicatarum erunt fractiones quælibet proportionum axium correspondentium, cum omnibus ex quadraturis dependentibus. Præcipuè cum omnibus centris grauitatis tàm ipsarum, quàm infinitorum trilineorum.

PROPOSITIO X.

Cylindrus circumscriptus cuilibet ex infinitis conoidibus, vel conicis est ad ipsum, vt rectangulum circumscriptum, vel parabolæ, vel trilineo cuius ratio ordinatim applicatarum sit dupla rationis ordinatim applicatarum in conoide, vel conico.

ESto APBC, in sequenti schemate. Quodlibet ex infinitis conoidibus parabolicis, vel conicis cum cylindro EC, circumscripto, & esto A^kBD, quælibet vel semiparabola, vel trilineum, vt in ipsis ordinatim applicatis quibuslibet QM, ratio QM, ad M^k, sit duplicata rationis QM, ad MP. Dico fore cylindrum ad conoides, vel conicum, vt rectangulum ad trilineum, vel semiparabolam. Res est luce clarior. Quia cum ratio QM, ad M^k, sit duplicata rationis QM, ad MP, erit QM, ad M^k, vt qua-

dra-



dratum QM, ad quadratum MP: seù vt circulus radij QM, ad circulum radij MP. Et hoc vbilibet. Ergo & cylindrus ad solidum, vt rectangulum ad semiparabolam, vel trilineum. Quod &c.

SCHOLIVM.

Ex his patet qualiter mensuræ conoideorum, vel conicorum inseruiant mensuris semiparabolarum, & trilineorum, & viciſſim. Si ergo habebimus, ex supra explicatis, mensuras conoideorum, vel conicorum,

rum, hæ inseruient mensuris trilineorum, & semiparabolarum, & è contra.

Insuper patet dicta conoidea, & conicos fore proportionaliter analogos cum præfatis semiparabolis, vel trilineis. Cum verò, ex dictis superiùs, pateant centra grauitatis omnium planorum; non erunt abscondita centra grauitatis omnium solidorum.

PRO-

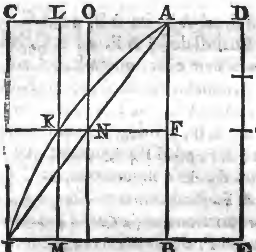
PROPOSITIO EORVM, QVÆ A THOMA HOBBES

Malmesburienſi pertractata circa præſens ſubiectum, non benè percipimus.

HVcuſque ea omnia verbis expreſſimus, quæ meditati ſumus circa infinitarum parabolarum materiam. Remanet aliqua patefacere, quæ circa idem ſubiectum à Clariſſimo, nec vnquam ſatis laudato *Thoma Hobbes Malmesburienſi*, haud rectè percipimus. Vir hic egregius incipit de his tractationem *in cap. 16. ſect. 1. Philoſoph. de corpore*, in quo capite peragit. *De motu accelerato*, & *Vniformi*, & *de motu per concurſum*. Ibique *in numero quarto* proponit ſequentem auream regulam, quam vtique veriſſimam cenſemus, ſed probationem non bene percipimus.

In motu (inquit ipſe) *à quiete ita accelerato vt impetus continuò creſcant in ratione temporum conſumptorum duplicata; erit quoque longitudo percurſa vno tempore ad longitudinem alio tempore percurſam, vt factum ex impetu in tempus vnius motus, ad factum ex impetu in tempus alterius motus*. Huiuſque aureæ regulæ explicationem ſubiungit in Schemate.

Sit enim (verba ipsius) *in fig.* 2. *tempus AB, in cuius temporis initio A, impetus sit ut ipsum punctum A; sed procedente tempore crescat impetus continuò in ratione temporum duplicata donec in ultimo puncto temporis B acquisitus sit impetus BI, & in AB tempore, sumpto ubicunque puncto F, ordinatim applicetur impetus eo tempore acquisitus FK.* Post hæc incipit probationem sic. *Quoniam ergo FK ad BI supponitur habere rationem duplicatam eius quam habet AF ad AB, habebit AF ad AB rationem subduplicatam eius quam habet FK, ad BI,* (egregiè me Hercle,) *& AB, ad AF duplicatam eius quam habet BI ad FK.* Hæc postrema verba ingenuè fatemur à nobis nequaquam



H per-

percipi. Immò pro certo habemus, (dummodò hæc vera sint) nos nunquam definitiones Quinti Libri Euclidis elementorum rectè percepisse. Inquit Euclides in loco citato def. 5.

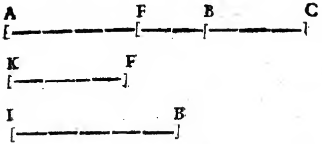
Quandò tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam, duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet secundam. Ex hac Definitione probamus Propositionem sequentem.

PROPOSITIO XI.

H beat AF, ad AB, subduplicatam rationem eius, quam habet KF, ad IB. Dico etiam conuertendo, habere BA, ad AF, subduplicatam rationem IB, ad KF.

Fiat vt AF, ad AB, ita AB, ad AC. Ergo (ex citat. Euclidi def.) AF, ad AC, habebit duplicatam rationem eius, quam habet ad AB. Et AF, ad AB, habebit subduplicatam rationem eius, quam habet ad AC. Sed ex hypothesi, habet etiam AF, ad AB, subduplicatam rationem eius, quam habet kF, ad IB. Quare vt AF, ad AC, sic kF, ad IB. Et conuertendo, vt CA, ad AF, sic IB, ad KF. Sed cum tres CA, BA, AF, sint continuè proportionales (ex dicta Euclid. Def.) habet CA, ad AF, duplicatam rationem eius, quam habet CA, ad AB; seù BA, ad AF. Et consequenter BA, ad AF, habebit subduplicatam ratio-

nem



nem eius, quam habet C A, ad A F. Quare etiam B A, ad A F, habebit rationem subduplicatam eius, quam habet I B, ad k F. Quod erat probandum.

Nescimus ergo percipere quomodò geometricè discurrat doctissimus Hobbes (reasumatur superius schema) dum ait. *Quoniam ergo FK ad BI supponitur habere rationem duplicatam eius quam habet AF ad AB, habebit AF ad AB rationem subduplicatam eius quam habet FK ad BI,* (egregiè vt supra diximus,) *&* (conuertendo) *AB ad AF duplicatam eius quam habet BI ad FK.* Contra propositionem antecedentem, cui doctrinæ haud subscribimus.

Sequitur Hobbes discursus. *Et proinde erit punctum K in linea Parabolica cuius diameter est AB, & basis BI.* Vtiquè punctum K, est in linea parabolica, sed non cuius diameter A B, basis I B, vt ipse putat, sed cuius diameter est C A, æqualis I B, basis C I, æqualis A B, vt infra conabimur probare.

Sed quod dicit de reliquis punctis, quæ sint in parabola, vera sunt, sed non existimamus in ea, quam

ipse descripsit. Sicuti non existimamus verum esse, quod affirmat dicens. *Quare impetus ductus in totum tempus AB erit parabola AKIB, quae aequalis est parallelogrammo AM cuius vnum quidem latus est AB tempus, alterum autem impetus AL, duae tertiae impetus BI.* Non enim impetus ductus in tempus constituit parabolam, sed trilineum parabolicum quadraticum, cuius vnum quidem latus est AB, tempus, alterum autem impetus AL, vna tertia impetus BI. Reliqua vsque ad corollarium primum, sunt eiusdem farinae, cum rectè deducerentur, quandò non commissus fuisset minimus error (vt putamus) in principio.

Ast corollarium primum, quamuis tanquam verum à nobis agnoscatur, attamen probatur modo, qui multum displicet. Cum data eiusdem veritate subsequatur falsitas nostrae proposit. 3. lib. 1. De infinitis Parabolis. Corollarium tale est. *Longitudines percursae motu ita accelerato vt impetus continuo crescant in ratione temporum duplicata, sunt in ratione suorum temporum triplicata.* Quod vtique verum est. Probatio talis est. *Nam vt longitudo DE ad DP, ita est parallelogrammum AM ad parallelogrammum AN,* (admittimus) *& ita parabola ABIK, ad parabolam AFK.* Transeat. *Sed parabola ABIK est ad parabolam AFK, in ratione triplicata eius rationis quam habet AB tempus ad AF tempus, &c.* Non percipimus. Nam vel haec, vel nostra citata propositio falsa est. Propositio nostra generalis

ralis talis eſt. *Si qualibet ex infinitis ſemiparabolis ſecetur linea baſi parallela: Erit ſemiparabola tota ad ſemiparabolam aduerticem, vt poteſtas baſis ſemiparabolæ vno gradu altior poteſtate parabolæ ad ſimilem poteſtatem baſis ſemiparabolæ aduerticem.* Ex qua regula, in caſu noſtro, ſemiparabola AkIB, eſt ad ſemiparabolam kAF, in triplicata ratione baſis IB, ad baſim kF, non axis BA, ad axim AF.

Secundum corollarium verum vtique eſt, aſt non putamus ex vi ſui diſcurſus, ſed ex eo, quem infra proponemus.

Tertium corollarium putamus falſum. Non enim credimus eſſe longitudinem ad longitudinem, vt parabola ad parallelogrammum, ſeu vt 2. ad 3. ſed vt trilineum ad parallelogrammum, nempe vt 1. ad 3.

Quartum corollarium cenſemus falſiſſimum: non enim inuenitur, vt ipſe ait. *Vbi impetus creſcunt in ratione temporum triplicata, totam velocitatem deſignari per parabolaſtrum primum* (nempe per parabolam cubicam,) ſed per trilineum cubicum, *& vbi impetus creſcunt in ratione temporum quadruplicata, totam velocitatem deſignari per parabolaſtrum ſecundum* (ſeù quadratoquadraticum,) ſed per tale trilineum.

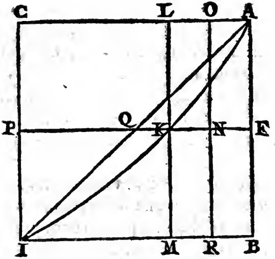
Sed iuxta noſtrum modum tradatur eadem regula, probeturque, & iuxta mentem noſtram deducantur corollaria.

PRO-

PROPOSITIO XII.

In motu à quiete ita accelerato, vt impetus continuò crescant in ratione temporum consumptorum duplicata; erit quoque longitudo percursa vno tempore ad longitudinem alio tempore percursam, vt factum ex impetu in tempus vnius motus, ad factum ex impetu in tempus alterius motus.

SIt enim tempus AB, in cuius temporis initio A, impetus sit vt ipsum punctum A, sed procedente tempore crescat impetus continuò in ratione temporum duplicata, donec in vltimo puncto temporis B, acquisitus sit impetus BI; & in AB, tempore, sumpto vbicunque puncto F, ordinatim applicetur impetus eo tempore acquisitus Fk. Quoniam ergo IB, ad kF, est in ratione duplicata BA, ad AF; nempe est vt quadratum BA, ad quadratum AF, erit punctum K, in linea parabolica, cuius axis CA, basis IC. (Si enim hæc intelligatur transire per K, & duci KL, parallelam IC, est per hypothesim, IB, seu CA, ad kF, seu LA, vt quadratum BA, seu CI, ad quadratum AF, seu Lk.) Et simili ratione in quocunque puncto temporis AB, applicetur impetus eo tempore acquisitus, erit recta eum impetum designans in eadem parabolica AkI. Quare impetus ductus in totum tempus AB, erit trilineum AkIB, quod æqua-



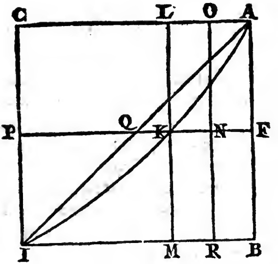
æquale eſt parallelogrammo AM, cuius vnum quidem latus eſt A B, tempus, alterum autem impetus A L, vna tertia impetus B I. (Eſt enim omne tale trilineum æquale trienti parallelogrammi altitudinem, & baſim habentis eandem.) Tota ergo velocitas per A B, vt quæ fit ab impetu AL, in tempus A B, eſt parallelogrammum A M. Similiter ſi ſumatur F N, quæ ſit ⅓ impetus Fk, compleaturque parallelogrammum F O, erit F O, tota velocitas per tempus A F, vt quæ fit ab impetu A O, ſiuè FN, iniformi ducto in tempus A F. Sit autem longitudo percurſa tempore A B, velocitate A M, recta D E. Poſtremò ſupponatur longitudo

per-

percursa tempore AF, velocitate AN, esse DP. Dico esse vt AM, ad AN, siue vt trilineum AKIB, ad trilineum AFk, ita DE, ad DP. Fiat vt AM, ad FL, (hoc est vt AB, ad AF,) ita DE, ad DG. Iam ratio AM, ad AN, componitur ex rationibus AM, ad FL, & FL, ad AN. Sed vt AM, ad FL, ita est per constructionem, DE, ad DG. Et vt FL, ad AN, (quia tempus vtrobique idem est nempe AF,) ita longitudo per DG, ad longitudinem DP, (nam eodem tempore longitudines percursæ sunt vt velocitates.) Quare ex æquo, vt AM, ad AN, nempe vt trilineum AKIB, ad trilineum AkF: nempe vt rectangulum CB, factum ex impetu IB, in tempus suum AB, ad rectangulum FL, factum ex impetu kF, in tempus suum AF, ita ED, ad DP. Quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Longitudines percursæ motu ita accelerato, vt impetus continuò crescant in ratione temporum duplicata, sunt in ratione suorum temporum triplicata. Nam vt longitudo DE, ad DP, ita est trilineum AkIB, ad trilineum AkF. Ast vniuersaliter ex schol. 1. citat. nostræ proposit. est trilineum ad trilineum, vt potestas BA, vno gradu altior potestatè trilinei, ad similem potestatem AF; nempe in casu nostro, vt cubus BA, ad cubum AF; nempe



pe in triplicata ratione BA, ad AF. Quare etiam ratio ED, ad DP, erit triplicata rationis BA, ad AF.

COROLLARIVM II.

Longitudines percurſæ æqualibus temporibus deinceps ab initio ſumptis in motu ita accelerato, vt impetus ſint in duplicata ratione temporum (ſiue in motu bis accelerato) ſunt vt differentiæ numerorum cuborum incipientium ab vnitate, hoc eſt vt 7. 19. 36. &c. Nam ſi primo tempore longitudo ponatur 1. in fine ſecundi temporis erit longitudo 8. In fine

tertij 27. In fine quarti 64. &c. Qui sunt numeri cubici, quorum differentiæ sunt 7. 19. 36. &c.

COROLLARIVM III.

In motu vniformiter accelerato, longitudo quælibet percursa, est ad longitudinem eodem quidem tempore percursam, sed impetu vbique quantus est vltimò acquisitus, vt trilineum ad parallelogrammum eiusdem altitudinis, & basis. Scilicet, vt 1. ad 3. Nam trilineum AkIB, est impetus crescens ductus in AB, tempus: & parallelogrammum AI, est impetus maximus, & vniformis ductus in idem tempus AB. Et proinde longitudines percursæ, erunt vt trilineum ad parallelogrammum, hoc est vt 1. ad 3.

Si vellemus cæteros motus prosequi vbi impetus crescunt in ratione temporum triplicata, quadruplicata, quintuplicata, &c. exiret labor in infinitum non necessarius. Nam qua Methodo longitudines percursas impetu simpliciter, & dupliciter crescente computauimus, poterit quis eadem Methodo longitudines percursas impetu crescente tripliciter, quadrupliciter, & quotupliciter velit computare.

Inueniet autem, vbi impetus crescunt in ratione temporum triplicata, totam velocitatem designari per trilineum cubicum, & longitudines percursas esse in ratione temporum quadruplicata. Et vbi impetus crescunt in ratione temporum quadruplicata, totam velocitatem designari per trili-

trilineum quadrato quadraticum, & longitudines esse in ratione temporum quintuplicata, & sic in infinitum.

Et hæc quidem quantum ad præfatum numerum quartum. Succedunt in eodem cap. alia, quæ eruditissimè determinat. Ast in cap. 17. vbi peragit *De Figuris Deficientibus*, paucissimis verbis concinnat elegantissimam, vniuersalissimamque regulam, quæ vtique concordat cum ijs omnibus, quas nos supra tradidimus. Nititurque ipsam stabilire aliqua certa, vniformi, sibique perpetuò constate probatione, & non verbosè per longas ambages, & medijs diuersis, vt nos fecimus. Regula autem talis est, tradita in numero 2.

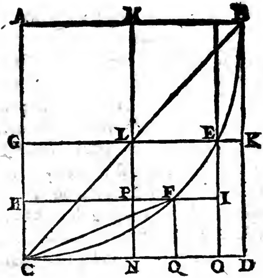
Figura deficiens facta à quantitate continuò decrescente donec euanescat, secundum rationes vbique proportionales & commensurabiles, est ad complementum suum, vt ratio totius altitudinis, ad altitudinem quolibet tempore diminutam, ad rationem quantitatis integræ quæ figuram describit, ad eandem tempore eodem diminutam.

Sit quantitas A B (in figura prima) quæ mota per altitudinem A C describat figuram A D completam; eadem verò decrescens donec in puncto C tota euanescat describat figuram deficientem A B E F C, cuius complementum erit figura B D C F E, intelligaturque motum esse A B donec iaceat in G k, vt altitudo diminuta sit G C; atque A B diminuta, sit G E, sitque ratio A C totius altitudinis, ad G C altitudinem diminutam, rationis A B siuè G k quantitatis integræ ad G E quantitatem diminutam, v. g. triplicata. Similiter sumatur H I æqualis G E, quæ dimi-

nuta fiat HF; *sitque ratio* GC *ad* HC *rationis* HI *ad* HF *triplicata*, & *sic perpetuò fiat & in omni parte rectæ* AC *possibili; ducaturque linea per* B, E, F, C, &c. *Dico figuram deficientem* ABEFC, *esse complementi sui* BDCEF *triplam, siue vt ratio quæ est inter* AC, GC *ad rationem quæ est inter* AB *siue* Gk & GE.

Ducatur enim CB *secans* Gk *in* L, & *per* L *ducatur* MN *parallela rectæ* AC; *erunt ergo parallelogramma* GM, LD *æqualia. Diuidatur iam* LK *in tres partes æquales, nimirum vt totupla sit partis vnius, quotupla est ratio inter* AC, GC, *siue inter* Gk, GL, *rationis quæ est inter* GK, GE. *Erit itaque* LK *ad vnam ex illis tribus partibus, vt ratio Arithmetica quæ est inter* GK, GL, *ad rationem Arithmeticam quæ est inter* Gk & GE, *siue* Gk *mulctatam* Ek *tertia parte rectæ* LK. Hæc postrema verba non benè percipimus. Interim adnotet lector quomodò Hobbes supponat kE, fore tertiam partem LK, quod etiam statim magis confirmat. *Quoniam autem altitudo* AG *vel* ML *supponenda est ob decrescentiam continuam minor omni quantitate data, etiam* LK, (*intercepta inter* CB *diagonalem, & latus* BD) *erit omni data quantitate minor; & proinde differentia inter* AB, GL, *omni etiam data quantitate minor. Quare* (*per coroll. art.* 27. *cap.* 13.) *mediæ inter* AB, (*Siue* GK) & GL *Arithmeticæ, à medijs inter easdem* Gk, GL. *Geometricis, non different; est ergo ratio inter* AC, GC, *rationis inter* Gk, GE *triplicata in ratione Arithmetica; quare ipsa* Ek *est tertia pars ipsius* Lk.

sistæ



Sistamus hic ergo. Nolumus pro nunc dubitare, medias Arithmeticas inter Gk, GL, non differre à medijs Geometricis inter easdem. Verùm tamen est, quod si ex hac doctrina deducitur fore Ek, tertiam partem KL, ipsa redditur valdè suspecta. Cum hoc non percipiamus, attenta sequenti propositione.

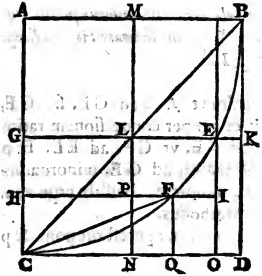
PROPOSITIO XIII.

In sim parabola cubica vbicunque ducatur GLEk, *paralle-*

rallela AB, vt in schemate Hobbes, impossibile est kE, fore trientem Lk.

SVpponatur ergo Ek, triens Lk, & consequenter dimidia LE. Cum ergo, ex natura parabolæ cubicæ, sit GE, maior duarum mediarum inter AB, seu Gk, & GL, erit vt quadratum GK, ad quadratum GE, sic GE, ad GL. Et per conuersionem rationis, vt quadratum Gk, ad duo rectangula GEk, (nempe ad rectangulum GEL) vna cum quadrato Ek (nempe vna cum quadrante quadrati LE) sic GE, ad EL. Nempe, sumpta communi altitudine Gk, sic rectangulum kGE, ad rectangulum KG, LE. Et permutando, vt quadratum Gk, ad rectangulum kGE, sic rectangulum GEL, cum quadrante quadrati LE, ad rectangulum Gk, LE. Sed quadratum Gk, maius est rectangulo kGE. Ergo etiam rectangulum GEL, simul cum quadrante quadrati LE, maius erit rectangulo Gk, LE. Quod tamen falsum est. Nam est minus, cum rectangulum Gk, LE, diuidatur in rectangula GEL, kEL. Quod kEL, est dimidium quadrati LE. Patet ergo propositum.

Cum ergo impossibile sit ostensum, fore kE, trientem kL, impossibile quoque erit verificari quæ ipse subiungit sic. *Et proinde si ducatur EO recte BD parallela, erit spatium ED tertia pars spatij LD, hoc est tertia pars spatij AL, est ergo spatium AL triplum spatij ED.* Cum alijs, quæ subiungit. Sed etiam clarius osten-



oſtendemus in parabola quadratica; & ordinaria, ſuam Methodum probandi non videri Geometricam.

Nam ſi vera erit, certum eſt, quòd cum proportio A C, ad C G, ſit duplicata rationis A B, ad G E, oportet ſecundum ipſum, L k, duplam fore K E; & K E, L E, fore æquales. Quod tamen non intelligimus, ſi ſequens propoſitio rectè à nobis probabitur.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

In semiparabola quadratica vbicunque ducatur G L E K, *parallela* A B, *vt in schemate Hobbes, semper* K E, *maior erit* E L.

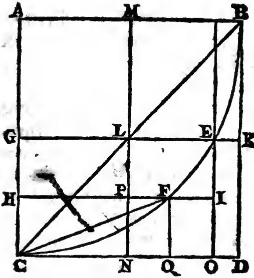
CVm enim vt A B, ad G E, sic G E, ad G L, erit etiam per conuersionem rationis, A B, seu G K, ad K E, vt G E, ad E L. Et permutando, vt K G, maior, ad G E, minorem, sic K E, maior, ad E L, minorem. Nullibi ergo æquales. Non currit ergo Methodus.

Immò vniuersaliter potest proponi, & patebit inductione.

PROPOSITIO XV.

In semiparabola quacunque vbicunque ducatur G L E K, *parallela* A B, *vt in schemate Hobbes, impossibile est fore* K E, *partem* L K, *quam dicit ipse.*

VT diximus, hæc propositio patebit inductione, obseruando modum arguendi, quem in superioribus adhibuimus, quem etiam repetemus in parabola quadratoquadratica, in qua, secundum Hobbes, erit k E, triens L E. Cum verò G E, sit maior trium mediarum inter K G, G L, erit vt cubus G K, ad cubum G E, sic G E, ad G L. Et per conuer-



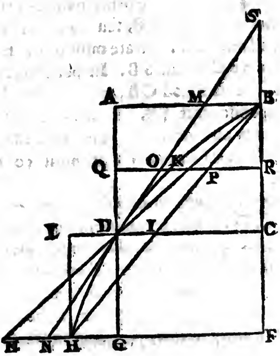
uerſionem rationis, vt cubus GK, ad ſui exceſſum ſupra cubum GE, ſic GE, ad LE: nempe (ſumpta communi altitudine quadrato GK) vt factum ſub GE, in quadratum GK, ad factum ſub LE, in quadratum GK. Et permutando, vt cubus GK, ad factum ſub GE, in quadratum GK, (nempe vt maius ad minus) ſic exceſſus cubi Gk, ſupra cubum GE, ad factum ſub LE, in quadratum GK. Differentia ergo cuborum kG, GE, maior erit factoſub LE, in quadratum GK. Quod tamen falſum eſt. Nam eſt minor. Differentia enim cuborum

K Gk,

Gk, GE, sunt cubus EK, tria facta sub kE, in quadratum GE, & tria facta sub GE, in quadratum Ek, vt passim probatur à Geometris, quorum vnus Caualerius lib. 2. Geom. Ind. proposit. 38. Cum verò kE, ex hypothesi, sit triens LE, cubus KE, erit $\frac{1}{27}$ cubi LE. Tria facta sub GE, in quadratum Ek, erunt æqualia facto sub LE, in trientem rectanguli GEL. Tria tandem facta sub kE, in quadratum GF, æquantur facto sub LE, in idem quadratum. Ast factum sub LE, in quadratum Gk, æquatur facto sub LE, in quadratum GE; facto sub LE, in duplum rectangulum GEk (nempe in $\frac{2}{3}$ rectanguli GEL) & facto sub LE, in quadratum kE; nempe $\frac{1}{9}$ quadrati LE. Hæc autem facta posteriora superant facta anteriora factis sub LE, in trientem rectanguli GEL, & sub LE, in $\frac{2}{27}$ quadrati LE. Patet ergo propositum. Sic forsitan lector experietur in altioribus potestatibus, & in alijs parabolis. Non enim volumus patientia lectorum abuti. Regula namque Hobbes ex dictis satis inficitur.

Post hæc eorum, quæ non bene percipimus succedunt exposita in numero 5. vbi paucis putat se expedire ab infinitarum parabolarum tangentibus. Inquit ergo sic. *Tangitur autem dictarum figurarum quælibet in quolibet puncto hoc modo. Sit linea (in figur 4.) BKDH tangenda in puncto D. Iungantur puncta B, D, ducaturque DA æqualis & parallela BC; & quia figura hæc ponitur exempli causa ex tribus medijs tertia, sumantur in AB tria puncta quibus ipsa AB diuiditur in quatuor*

par-



partes æquales, *ex quibus partibus sumantur tres nempe* *AM*, (est error in impressione vult enim dicere, nempe BM) *vt* AB *sit ad* AM, *vt figura* BKDC *ad suum complementum; ducta recta* MD *tanget figuram in puncto* D.

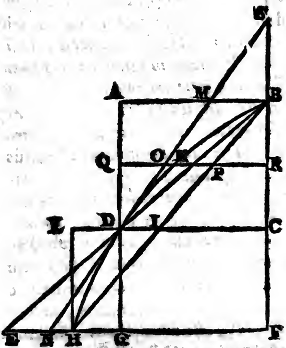
Pulcherrima quidem regula. Conuenit enim cum ea quam nos tradidimus in proposit. 50. nostri Miscell. Hyperbolici, & Parabolici, sed in parabolis principalibus dumtaxat. Cum enim sit BA, ad AM, secundum ipsum, vt parabola DkBC, ad tri-

lineum D k B A: nempe vt numerus parabolæ ad vnitatem (loquendo de principalibus;) erit per conuersionem rationis, A B, seu D C, ad M B, vt numerus ad numerum vnitate minutum. Et in eadem ratione erit C S, ad S B. Et per conuersionem rationis, erit C S, ad C B, vt numerus ad vnitatem. Et diuidendo, erit S B, ad B C, vt numerus vnitate minutus ad vnitatem. Quæ est eadem regula à nobis assignata in præfata proposit. 50. Quæ sic se habet.

Si in qualibet infinitarum parabolarum sumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum recta linea ordinatim applicetur, diameterque ita producatur vt pars extra parabolam sit ad partem diametri abscissam ab ordinatim applicata versus verticem, vt numerus parabolæ vnitate minutus ad vnitatem. Recta linea, quæ ab extremitate inuentæ lineæ ducitur ad illud punctum, quod sumptum fuerat; parabolam continget.

Sed videamus quomodo Hobbes suam regulam probet. *Ducatur enim* (inquit) *parallela R Q vtcunque inter A B. & D C, secans B D rectam, B D curuam, M D rectam, & A D rectam in punctis P, K, O, Q; erit ergo R K, (per constructionem) trium Geometricè mediarum inter R Q & R P, minima.* Quid dicis Hobbes? Hoc non intelligimus. Nos putamus R K, esse maximam trium intermediarum inter Q R, R P, non minimam. Secundum enim te figura D k B C, *est ex tribus medijs tertia.* Nempe secundum nos quadratoquadratica. In tali autem est vt Q R, ad R P,

sic



sic quadratoquadratum QR, ad quadratoquadratum Rk. Est ergo QR, ad RP, in quadruplicata ratione QR, ad Rk. Quid autem ait Euclides in Def. 11 lib. 5. elementi? *Quandò autem quatuor magnitudines sint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad secundam, & semper deinceps vna plus, quoad analogia processerit.* Est ergo kR, secunda quinque proportionalium; & consequenter maxima, non minima trium intermediarum inter QR, RP. Id verò quod ex hoc col-

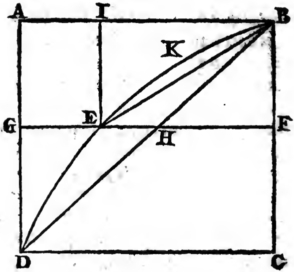
colligit. *Itaque (per coroll. art. 28. cap. 13.) minor est R K quam R O; cadit ergo M D extra figuram.* Nescimus videre quid colligat ex illo corollario. Hoc enim sic se habet. *Manifestum hinc est quod si quantitas aliqua diuisa supponatur in partes æquales numero infinitas, differentiam intermediam Arithmeticam & Geometricam fore infinitè paruam, id est nullam. Atque ex hoc præcipuè fundamento videtur orta esse ars construendi numeros illos quos vocant Logarithmos.* Potius videtur colligi posse ex numero 26. eiusdem capitis, vbi proponitur. *Si fuerint inter eadem extrema, sed inter se inæqualia, interposita quotcunque media, tàm in Geometrica quàm in Arithmetica ratione, totidem vtrobique, singula media rationis Geometricæ, erunt singulis medijs rationis Arithmeticæ minora.* Potius ergo videtur colligi ex hac doctrina. Quod vt verum sit, prius esset probandum, O R, esse maiorem Arithmeticam trium intermediarum inter Q R, R P; veluti etiam K R, est maior Geometrica trium intermediarum inter easdem. Non enim omnis Geometrica, minor probatur omni Arithmetica, sed sua correspondente; nempe maior, minor maiore; minor, minor minore. Sed potest dari, vt sit error impressionis dum supra dicit. *Erit ergo R K trium Geometricè mediarum inter R Q & R P, minima.*

Continuetur (inquit Hobbes) *iam M D in N; & erit F N trium mediarum inter F E & F G maxima in ratione Arithmetica*, (videtur gratis dictum) *& F H trium mediarum maxima quoque inter easdem F E, F G*

in.

in ratione Geometrica; Quod quandò esset, verum etiam foret quod subiungit. *Quare per dictum corollarium art. 28. cap. 13.) minor erit FH quàm FN.* Sed non ex vi corollarij citati, sed ex citata doctrina exposita in numerò 26.

Ast quæ nullatenùs intelligimus, circa, quæque proponemus nostras difficultates, quas putamus haud spernendas, ea sunt, quæ ipse proponit in numero 10. inquiens. *Ex ijs quæ de figuris deficientibus in parallelogrammo descriptis dicta sunt, inueniri possunt spatiorum quæ determinatis temporibus motu accelerato percurruntur, ad ipsa tempora rationes, prout vno vel pluribus gradibus velocitas mobilis singulis augetur temporibus.* Hæc omnia vera sunt. Sicuti hæc, quæ sequuntur. *Sit enim (in fig. 6.) parallelogrammum ABCD, in qua descriptum sit trilineum DEBC; ductaque basi parallela vbicunque FG secet BD diagonalem in H, curuam BED in E; sitque ratio BC ad BF rationis FG ad FE, exempli causa, triplicata; erit ergò figura DEBC complementi sui BEDA tripla. Similiter ducta IE parallela ipsi BC, figura trilinea EKBF erit tripla complementi sui BKEI. Erunt igitur inter se figuræ deficientis partes à vertice abscissæ à rectis basi parallelis (nempe DEBC, EKBF,) vt parallelogramma AC, IF, idest, in ratione composita altitudinum & basium; quoniam ergo altitudo BC ad altitudinem BF ponitur esse in ratione basium DC, FE triplicata, erit figura DEBC ad figuram EkBF in ratione DC ad FE quadruplicata. Eadem Methodo inueniri potest ratio cuiuslibet ex trilineis prædictis*



dictis ad partem eiusdem quamcunque abscissam à vertice recta basi parallela.

Iam sicut figuræ dictæ descriptæ intelliguntur ex base, puta CD decrescente donec desinat in puncto, vt in B, ita etiam descriptæ eędem intelligi possunt à puncto, vt B, crescente donec acquirat magnitudinem quamlibet, vt CD.

Intelligatur igitur à puncto B crescente in magnitudinem CD, descripta BEDC. Quoniam ergo BC est ad BF in ratione CD, ad FE triplicata. Ad hunc locum vsque egregiè discurrit. *Erit inuertendo (vt mox ostendemus) FE ad CD in ratione BF ab BC triplicata.* Hic discursus à nobis non percipitur,

&c est

& eſt eiuſdem rationis cum alio ſupra exploſo in propoſit. ſed magis officit, quia inquit (*ut mox oſtendemus.*) Quod ſi præſtabit, erit nobis Magnus Apollonius, & præſtabit id, quod nobis apertè falſum videtur. Recolantur ea, quæ probauimus in propoſit. 11. & diſcurrendo eodem modo, ſed rationem extendendo ad quartam proportionalem, concludemus propoſitum. Putamus enim eſſe veriſſimam doctrinam ſequentem, quam vnuſquiſque probare poterit inductione.

PROPOSITIO XVI.

Si prima magnitudo habeat ad ſecundam rationem utcunque multiplicatam eius, quam habet tertia ad quartam. Conuertendo, habebit ſecunda ad primam utcunque multiplicatam eius, quam habet quarta ad tertiam.

NOn ergo videtur bonus diſcurſus. *Quoniam ergo BC eſt ad BF in ratione CD, ad FE triplicata, erit inuertendo, FE ad CD in ratione BF ad BC, triplicata.* Sed diſcurramus in hoc caſu. Dic quæſo Hobbes? CB, eſt ad BF, in ratione DC, ad EF, triplicata. Sed etiam cubus DC, eſt ad cubum EF (ex 33. 11. elem.) in ratione triplicata DC, ad EF. Ergo vt CB, ab BF, ſic cubus DC, ad cubum EF. (Et hæc eſt ipſamet natura parabolæ.) Ergo & conuertendo, vt BF, ad BC, ſic cubus EF, ad cubum DC. Sed ex citat. propoſit

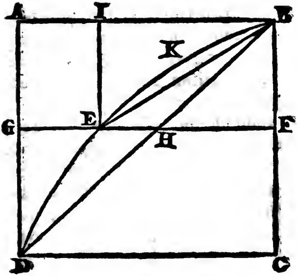
L elem.

elem. est cubus ad cubum in triplicata ratione EF, ad DC. Ergo etiam BF, ad BC, erit in triplicata ratione EF, ad DC.

Ex hoc principio, quod nobis falsum videtur, deducit perparam, quæ deducit. Et reducitur ad inferendum. Semiparabolam EkBF, esse ad semiparabolam DEBC, in quadruplicata ratione BF, ad BC. Quod est falsum, nam est in quadruplicata ratione EF, ad DC, vt luculenter probauimus in prop. 3. lib. 1. de Infin. Parab. Non ergo spatiorum, quæ determinatis temporibus motu accelerato percurruntur, ad ipsa tempora, rationes inueniuntur ex parabolis, vt ipse putat, sed ex trilineis, vt nos supra fecimus.

Sed magis admiramur ex ijs, quæ subiungit, nitens probare, probatu impossibile visum nobis, dicens. *Restat vt ostendamus rationem F E ad C D, esse rationis B F ad B C triplicatam. Quia ratio (C D hoc est) F G ad F E subtriplicata est rationis B C ad B F, erit quoque ratio F G ad F E subtriplicata rationis F G ad F H; quare ratio F G ad F H est triplicata rationis F G (idest C D) ad F E.* Omnia hæc geometricè procedunt; *sed in quatuor continuè proportionalibus quarum prima est minima, ratio primæ ad quartam (per cap. 13. art. 16.) subtriplicata est rationis tertiæ ad vltimam.* Doctrina secundum nos haud bene sonans. Videndum est ergo quomodò hanc probet in loco quem citat. Si enim hanc probabit, rectè sequuntur cætera. Inquit ergo sic.

Ra-



Ratio maioris ad minus per numerum multiplicari dicitur, quando ipsi aliquot rationes æquales siue eædem sibi adduntur; nam multiplicatio nihil aliud est quàm æqualium repetita additio. Itaque si rationi alia ratio addatur ipsi æqualis, fient tres quantitates, quarum ratio primæ ad vltimam, dupla est primæ ad secundam; sin primæ rationi duæ æquales ipsi addantur, erunt quatuor quantitates, in quibus ratio primæ ad vltimam tripla erit primæ ad secundam, & sic deinceps. Sed ad euitandam confusionem quæ oriri ex eo potest, quod ratio 2 ad 1 vocatur dupla, & 3 ad 1 tripla, &c. solent plerique pro ratione dupla, tripla, &c. dicere duplicatam, triplicatam, & sic deinceps. Hæc omnia transeant. Sed præstat retinere vsum communem Geo-

metrarum, vocando duplam proportionem duplicatam, & triplam triplicatam.

Pro autem maiori intelligentia, animaduertatur, quod proportiones duplæ, triplæ &c. quas considerauit Hobbes, non sunt duplæ, & triplæ absolutè, sed alterius proportionis. Meliùs ergo, & rectius geometrizabimus, si dicamus, aliud esse proportionem duplam, aliud esse proportionem duplam proportionis. Nam proportio dupla respicit tantum duos terminos; at proportio, dupla proportionis, respicit quatuor terminos. Nam si disponantur hi numeri 4. 2. 1. Proportio 4. ad 2. est dupla, & pariter proportio 2. ad 1. est dupla, & quælibet harum proportionum non respicit nisi duos terminos: at proportio 4. ad 1. quia componitur ex duabus proportionibus æqualibus, est quidem dupla, sed cuius? Proportionis 4. ad 2. & proportionis 2. ad 1. Quod si loquamur absolutè, proportio 4. ad 1. non est dupla, sed quadrupla. Vndè apparet euidenter, quòd quandò fit transitus à comparatione proportionum cum proportionibus, ad comparationem proportionis terminorum, non fiunt æqualia incrementa. Ratio enim 4. ad 1. est duplicata proportionis 4. ad 2. Sed postea absolutè sumpta est quadrupla. Sic si ratio decrescat, vt numeri sint 1. 2. 4. Ratio 1. ad 4. est duplicata rationis 1. ad 2. respectiuè, sed postea absolute sumpta est subquadrupla. Et hæc dicta sint ad vberiorem scientiam.

Sequitur Hobbes. Quod si ratio detur minoris ad maius,

lus, rationesque aliquot addantur ipsi æquales, non multiplicari propriè sed submultiplicari dicitur; nam cum sit ratio defectus, defectus autem multiplicati faciant semper minorem rationem, tanto minor erit ratio quanto pluries multiplicantur; itaque quando additur primæ rationi altera, ratio primæ quantitatis ad tertiam semissis est rationis primæ ad secundam quando rursus additur bis tertia, ratio primæ quantitatis ad quartam triens est rationis primæ ad secundam, &c. Hæc omnia transeant. *Sed pro semisse, triente, &c. vulgo dicitur ratio subduplicata, subtriplicata, &c.* In his vltimis verbis putamus deceptionem Hobbes consistere. Non enim illa ratio vocatur subduplicata, subtriplicata, &c. Sed duplicata, triplicata &c. Pro autem maiori intelligentia, exemplificetur in numeris supra positis. Sint hi 1. 2. 4. In quibus apparet 1. ad 4. habere minorem rationem, quam habet ad 2. Sed postea 1. ad 4. habet duplicatam proportionem eius, quam habet ad 2. Sunt enim 1. 2. 4. termini continuò proportionales. Inquit autem Euclides in Def. 10. 5. elemen. *Quandò tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundam.* Potiùs ergo Geometrizandum est, vt supra fecimus, agnoscendo, aliud esse proportionem duplam, aliud proportionem duplam proportionis. Nam proportio dupla, est semper maioris ad minus. Ast proportio dupla proportionis non sic, sed aliquandò potest esse maior, aliquandò minor. Maior in proportionibus excessus: minor in proportionibus defectus. 4. enim ad 1.

habet duplam proportionem eius, quam habet ad 2. & est maior ea. E contra autem, proportio 1. ad 4. est duplicata eius quidem, quam habet ad 2. sed ea est minor. Vndè illa est dupla maior; hæc verò dupla minor, quia in minoritate consistit eius essentia.

Et quidem doctrina hæc Hobbes est contrarijssima doctrinis omnium Geometrarum, qui super elementa Euclidis fundarunt suas omnes ratiocinationes. Quantum autem contrarietur Euclidis doctrinis, vnusquisque poterit colligere ex pluribus ipsius locis. In definitione enim 10. supra citata inquit absolutè. *Quando tres magnitudines proportionales sint* (non dicit in propositione excessus, vel defectus, sed absolutè) *prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundam*. Sic in Def. 11. *Quando autem quatuor magnitudines sint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad secundam, & semper deinceps vna plus quo ad analogia processerit*. Sed in his non est amplius demorandum.

Post hæc ad præsentem materiam infinitarum parabolarum attinentia, sunt quædam illorum, quæ continentur in cap. 23. In cuius numero 9. assignat hanc regulam generalem. *Centrum æquilibrij cuiuslibet figuræ deficientis secundum rationes, diminutæ altitudinis & diminutæ basis, commensurabiles, cuius completa est parallelogrammum, vel cylindrus, vel parallelepipedum, axem figuræ ita diuidit, vt pars ad verticem, sit ad partem*
rel-

reliquam, vt figura completa ad ipsam deficientem. Hæc regula in infinitis parabolis omnibus, & pariter in omnibus infinitis conoidibus vera est. Ast propositio Hobbes est in calce deficiens. Suum enim est probare in semiparabolis, quod si distantia centri æquilibrij figuræ completæ ad aliam distantiam habeat rationem compositam ex ratione momenti figuræ completæ, ad momentum figuræ deficientis, & ex ratione reciproca ponderis deficientis ad pondus completæ, in puncto terminante talem distantiam sit centrum æquilibrij deficientis. Quod tamen est verissimum.

In corollario autem secundo docet vbi reperiatur in numeris centrum grauitatis infinitorum conoideorum, & attamen hoc non probat.

Sed in numero 10. assignat aliam regulam generalem, quam vtique veram censemus, ac cum nostris concordantem, sed sua probatione nescimus videre quid concludat: immò nobis videtur admittere quoddam falsum. Regula talis est. *Diameter æquilibrij complementi, semissis figuræ cuiuslibet earum quę habentur in tabella articuli tertij capitis decimiseptimi, diuidit eam quę per verticem figurę ducitur basi parallela & ęqualis, ita vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt figura completa ad complementum*. Regula, vt diximus verissima est. Sed non putamus vera, quæ dicit quasi in fine probationis ante corollarium. Nimirum. *Sunt autem omnes simul applicatæ in AICD momentum eius, & omnes applicatæ in AICB momentum ipsius AICB*.

Nos

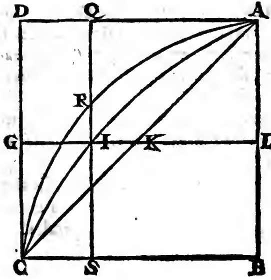
Nos putamus falsum esse momentum trilinei CIAD, esse omnes applicatas in trilineo, & pariter in semiparabola.

Sed potius si perpendamus ea, quæ tradidit Cavalerius in exercit. 5. & communiter docent Geometræ in materia momentorum, & etiam ipsemet Hobbes in numero 7. vbi ostendit momentum parallelogrammi &c. esse triangulum, dicimus.

PROPOSITIO XVII.

Momentum trilinei CIAD, esse omnes applicatas in trilineo, cuius ratio ordinatim applicatarum excedat rationem ordinatim applicatarum in ipso, ratione radicali.

V. G. Esto aliud trilineum DARC, in quo ratio CD, ad QR, sit composita ex ratione DC, ad QI, & ex ratione DA, ad AQ, (quæ est æqualis radicali.) Dicimus omnes ordinatim applicatas in trilineo DARC, fore momentum ipsius trilinei DAIC. Quòd quidem facilè patebit ducendo arbitrariè QRIS, secantem omnia prout in schemate. Momentum DC, ad momentum QI, habet rationem compositam ex ratione momenti DC, ad momentum QS, (nempe ex ratione DA, ad AQ) & ex ratione momenti QS, ad momentum QI, (nempe ex ratione magnitudinis QS, seù DC, ad magnitudinem QI.) Sed ratio DC, ad QR, est composita, per suppositionem, ex



ex ijſdem proportionibus. Ergo ſi DC, ſit momentum ipſius DC, erit QR, momentum ipſius QI. Et ſic de omnibus alijs. Patet ergo propoſitum.

COROLLARIVM.

Cum verò totum triangulum DAC, ſit momentum totius parallelogrammi DB, & trilineum DARC, momentum trilinei DAIC; erit exceſſus trianguli ſupra trilineum, nempe exceſſus ſemiparabolæ ARCB, ſupra triangulum CAB, momentum ſemiparabolæ AICB.

M Ne-

Neſcimus ergo videre, qualiter ex hac doctrina, quæ nobis videtur falſa. *Sunt autem omnes ſimul applicatæ in AICD momentum eius, & omnes applicatæ in AICB momentum ipſius AICB:* concludat Hobbes. *Quare momenta complementorum ſemiſſium figurarum deficientium in tabella, art. 3 cap. 17. comparatarum, ſunt vt ipſę figurę deficientes; & propterea recta AD diuiditur à diametro ęquilibrij in ea ratione, vt pars ad verticem, ſit ad reliquam, vt figura completa ABCD ad complementum AICD.*

Sed de his momentis exactiùs fortaſſis aliquandò. Nos namque in Hobbes nolumus alia conſiderare. Sed iam deueniamus ad Vuallisij Spirales.

DE

DE INFINITIS SPIRALIBVS VVALLISII.

ANno 1660. Menſe Iulij publicauimus Opuſculum noſtrum. *De Infinitorum Spiralium Spatiorum Menſura*. Quod quum ad calcem vſque incluſiuè impreſſum fuiſſet, admonente Clariſſimo Geometra Petro Paulo Carauaggio, anxiè tranſcurrimus Arithmeticam infinitorum profundiſſimi Geometræ Ioannis Vuallisij Sauiliani in Academia Oxonienſi Geometriam profitentis. Cum enim certiores nos feciſſet præfatus Carauaggius, Vualliſium de Infinitis Spiralibus pertractaſſe; rationabilis timor nos concuſſit, ipſum ſcilicet præiuiſſe; ac de infinitis ſpiralibus loquendo, nihil aliud eſſet, quàm actum agere. Aſt non ſolum inſpeximus, ipſum de infinitis ſpiralibus verba feciſſe; ſed etiam de illorum multis, circa quæ & Caualerius anno 1656 in ſuis exercitationibus Geometricis, & nos, ambobus poſteriores, in noſtris operibus; quinimmò in præſenti opuſculo etiam. Quod verò in dicta digreſſione ingenuè faſſi ſumus, neutique pœnitere ſcripta noſtra typis conſignaſſe, denuò repetimus. Proceſſimus namque per Metho-

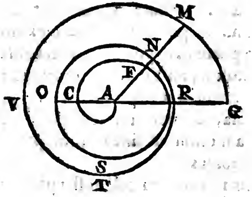
dum à sua totaliter diuersam; & iuxta nobis connaturale, geometrica geometricè pertractauimus.

Porrò quòad infinitas spirales attinet, à nostrarum diuulgatione haud fuit abstinendum. Siquidem, nostræ à suis distant toto cœlo. Suæ namque diuertificantur ex diuersa proportione in spirales incidentium ab initio ad inuicem secundum multiplicatam proportionem angulorum. Ast in nostris res è contra accidit. Incidens namque ad incidentem est in submultiplici proportione anguli ad angulum. Colligimus nos primum circulum fore ad spatia spiralia, vt numerus binario auctus ad numerum. Colligit ipse, esse vt numerus binario auctus ad vnitatem. Existimat ipse proportionem circuli ad dicta spatia spiralia eandem fore cum ratione parallelogrammi ad infinita trilinea. Existimamus nos, talem rationem esse eandem cum ratione trianguli ad sui excessum supra infinita trilinea. Sed hæc omnia, quantum sufficere arbitrabamur exposita, videat lector in digressione citata. Vnum cupimus animaduerti, etiam illo tempore nos valdè hæsitasse circa Vuallisij doctrinam. Et quod dubios nos reddebat, erat, analogiam illam, quam Phœnix ingeniorum Torricellius considerauit inter spiralem linearem, & parabolam quadraticam, minimè seruari inter alias infinitas parabolas, & infinitas spirales Vuallisianas. Mirum namque videbatur seruari easdem proportiones, vt in pagina 119. & 120. traditum fuit, secùs verò analogiam. Ast tunc temporis non

va-

valuimus nos certiores reddere de veritate assertorum Vuallisij. Methodo namque à sua diuersa non constabat nec de veritate, nec de falsitate illorum. Hoc credimus in præsenti obtinere ex doctrinis in libruncolo præsenti explicatis. Licet autem discrimen inter nostra, ac Vuallisiana infinita spatia spiralia fuerit luculenter expositum in digressione nostra antedicta; attamen vt necessaria ad dicendorum capescentiam omnibus sint in promptu, ea denuò paucis repetemus.

Diximus initio Opusculi nostri prædicti, spirales nostras generari ex duplici motu eodem tempore peracto, nimirum in sequenti schemate, puncti A, æqualiter moti per semidiametrum A R, & semidiametri A R, circa centrum A, puncto R, describentis peripheriam, vel æquabiliter, vel ita vt circumferentia sit ad circumferentiam, siue angulus ad angulum, vt variæ temporum potestates. Emanat ex hoc, incidentem. v.g. A C, fore ad incidentem A F, in submultiplici proportione anguli, ad angulum, seù arcus, ad arcum. Pariter Vuallisij infinitæ spirales creantur ex duplici motu eorundem mobilium, sed modis oppositis. Motus enim semidiametri A R, per circumferentiam semper est æquabilis Ast motus puncti A, per semidiametrum, vel æquabilis, vel variè acceleratus iuxta varias potestates temporum. Sic eueniet, vt incidens. v. g. A C, sit ad incidentem A F, in multiplici proportione arcus R S O, ad arcum R S O N, seù anguli



guli AOSRA, subtensi, ad angulum subtensum arcu RSON. Si ergo motus per AR, erit in duplicata ratione temporis, seu motus AR, per peripheriam, erit secunda spiralis Vuallisij. Si in triplicata, erit tertia. Et sic deinceps. His autem perceptis, sit

PROPOSITIO XVIII.

Excessus primi circuli supra quodlibet spatium spirale Vuallisij ex prima reuolutione, est aequalis trilineo parabolico quadratico, in quo ratio basis ad quamlibet ordinatim applicatam, sit ad rationem radicalem, vt numerus spiralis vnitate auctus, ad numerum, & cuius diameter sit aequalis semidiametro circuli, basis verò circumferentiae.

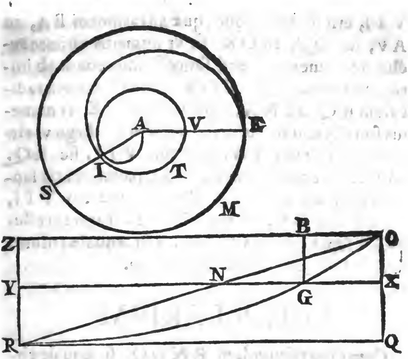
Hæc

HÆc propositio probabitur ferè eodem modo, quo stabilita fuit proposit. 6. tractatus nostri De infin. spir. &c. adhibendo congruens trilineum. Sit ergo quæcunque spiralis ex prima reuolutione AIE, AE, verò sit linea reuolutionis initium, sitque etiam semidiameter circuli primi; item sit parallelogrammum rectangulum ZQ, circumscriptum semiparabolæ ZOGR, cuius basis ZR, æqualis AE, vertex O, quæ sit talis naturæ, vt acta YX, parallela RQ, secante etiam OR, in N, ratio YX, seu RQ, ad GX, sit ad rationem radicalem YX, seu RQ, ad NX, vel QO, ad OX, vt numerus spiralis vnitate auctus, ad numerum spiralis. V. g. si spiralis sit prima, seu Archimedea, ratio RQ, ad GX, sit duplicata rationis QO, ad OX. Si si secunda, ratio RQ, ad GX, sit sesquialtera rationis QO, ad OX. Si tertia, sesquiquarta. Et sic in infinitum. Sit insuper RQ, æqualis circumferentiæ EMSE. Dico trilineum RGOQ, æquale fore excessui circuli radij AE, supra spatium spirale AIEA. Centro A, interuallo qualibet AV, describatur circuli paripheria secans spiralem in puncto V, & facta OX, æquali AV, ducatur YX, parallela RQ, secans omnia prout in schemate. Circumferentia radij AE, ad arcum VTI, habet rationem compositam ex ratione ipsius ad circumferentiam radij AV, (nempe radij EA, ad AV) & circumferentiæ radij VA, ad arcum VTI; nem-

pe

pe circumferentiæ radij EA, ad arcum EMS. Sed cum ratio EA, ad AV, ſupponatur per hypotheſim, multiplicata peripheriæ ad arcum ſecundum numerum ſpiralis. Nimirum in prima ſpirali, ſit EA, ad AV, vt circumferentia radij EA, ad arcum EMS. In ſecunda, ſit EA, ad AV, in duplicata ratione circumferentiæ ad arcum. In tertia, in triplicata: Et ſic in infinitum; Erit circumferentia ad arcum in ſubmultiplicata ratione EA, ad AV, ſecundum numerum ſpiralis. Nempe in prima, vt EA, ad AV. In ſecunda, in ſubduplicata ratione EA, ad AV. In tertia in ſubtriplicata, & ſic in alijs. Ergo ratio circumferentiæ radij EA, ad arcum VTI, erit compoſita ex ratione EA, ad AV, & ex ſubmultiplicata proportione EA, ad AV, ſecundum numerum ſpiralis. Sed talem ſubmultiplicatam proportionem EA, ad AV, habet EA, ad maiorem mediarum continuò quotus eſt numerus ſpiralis vnitate minutus, quæ proportio eſt etiam talis pars proportionis EA, ad AV, vt ſit ad ipſam vt vnitas ad numerum. V. g. in prima ſpirali, vbi numerus eſt vnitas, numerus vnitate minutus eſt nihil, & media nulla, & proportio EA, ad AV, eſt quæſita. In ſecunda, media inter EA, AV, eſt vnica, & proportio EA, ad ipſam eſt $\frac{1}{2}$ proportionis EA, ad AV. In tertia, mediæ ſunt duæ, & ratio EA, ad maiorem eſt $\frac{1}{3}$ rationis EA, ad AV. A primo ergo ad vltimum ratio circumferentiæ radij EA, ad arcum VTI, eſt compoſita

ex



ex ratione EA, ad AV, & ex tali parte rationis EA, ad AV, quæ ſit ad ipſam vt vnitas ad numerum. Sed ex talibus proportionibus componitur talis ratio, quæ ad rationem EA, ad AV, ſit vt numerus ſpiralis vnitate auctus ad numerum. V.g. in prima ſpirali, ex ratione EA, ad AV, & ex alia ratione EA, ad AV, fit duplicata ratio EA, ad AV. In ſecunda, ex ratione EA, ad AV, & ex ſubduplicata ratione EA, ad AV, fit ſeſquialtera rationis EA, ad AV. In tertia, ex ratione EA, ad

N AV,

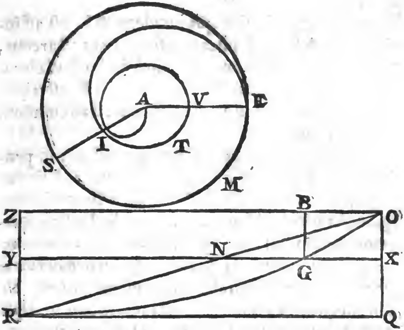
AV, & ex eius triente, fit eius sesquitertia. Et sic in alijs. Ergo circumferentia radij EA, ad arcum VTI, erit in tali ratione, quæ ad rationem EA, ad AV, seu QO, ad OX, sit vt numerus vnitate auctus ad numerum. Sed supposuimus etiam ab initio, rationem RQ, ad GX, esse ad rationem radicalem RQ, ad NX, seu QO, ad OX, vt numerus spiralis vnitate auctus ad numerum. Ergo vt circumferentia radij EA, ad arcum VTI, sic RQ, ad GX. Et permutando. Sed circumferentia supposita fuit æqualis RQ. Ergo etiam arcus VTI, erit æqualis GX. Et hoc vbilibet. Ergo excessus circuli supra spatium spirale, erit æqualis trilineo RGOQ. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Cum ergo triangulum RNOQ, sit æquale circulo radij AE, erit excessus trianguli supra trilineum RGOQ, æqualis spatio spirali AIEA.

SCHOLIVM.

Infinita ergo trilinea RGOQ erunt illa de quibus loquuti sumus in proposit. 8. in quibus ratio NX, ad XG, est talis fractio rationis radicalis RQ, ad NX, vt eius numerator sit vnitas, denominator verò 2. 3. 4. &c. in progressione Arithmetica. Vbi etiam conclusum fuit, rectangulum ZQ, fore



fore ad trilineum R G O Q, vt duplus numerus denominatoris fractionis vnitate auctus, ad ipsum numerum denominatoris. Nempe vt 5. ad 2. Vt 7. ad 3. Vt 9. ad 4. Et sic in infinitum. Ergo triangulum R N O Q, dimidium parallelogrammi, erit ad trilineum, vt idem antecedens, ad duplum numerum denominatoris. Nempe vt 5. ad 4. Vt 7. ad 6. Vt 9. ad 8. Et per conuersionem rationis, & conuertendo, erit excessus trianguli supra trilineum ad ipsum triangulum, & consequenter spatium spirale ad ipsum

N 2 pri-

primum circulum, vt vnitas ad duplum numerum vnitate auctum. Nempe vt 1. ad 3. Vt 1. ad 7. Vt 1. ad 9. Et sic in infinitum.

In illa ergo spirali in qua incidens A I, est ad incidentem A E, in duplicata ratione arcus ad arcum, seu anguli ad angulum, spatium spirale est ad circulum vt 1. ad 5. In illa, in qua ratio A I, A E, est triplicata rationis arcus ad arcum, spatium est ad circulum vt 1. ad 7. Etc.

Ageometricè ergo discurrimus vel nos in præsenti, vel Vuallisius in schol. proposit. 45. Arithm. infinitorum, vbi colligit (vt ibidem licet videre) quandò ratio incidentium augetur in duplicata ratione angulorum, *Et figura adiacens erit ad conterminum sectorem, vt* 1. *ad* 4. (*nempe vt series tertianorum ad seriem æqualium.*) Cum alijs, quæ ibidem profert. Nimirum quandò incidens est ad incidentem in triplicata ratione arcus ad arcum, vel in quadruplicata &c. *esse figuram adiacentem ad conterminum sectorem, vt* 1. *ad* 5. 6. Etc.

Quæ etiam dicit de mensura ipsarum linearum spiralium non benè percipimus. Sed hæc prætereamus; nobis enim sufficit suppleuisse defectui præfatæ digressionis; illaque spatia spiralia mensurasse, quæ nequiuimus illo tempore, carentes doctrinis superiùs expositis: nimirum trilineis parabolicis proportionatis. Quòd verò diuersa collegerimus ab Vuallisio, prouenit ex eo, quòd nos perambulauimus veterem Caualerij viam. Vuallisius verò nonam

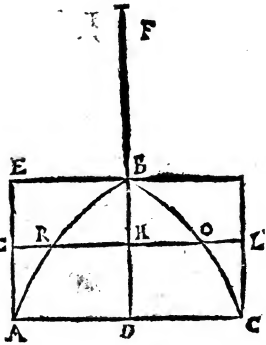
uam ſtruit. Quæ autem tutior ſit, ac ad veritatem ducens, examinet Lector. Nobis enim videtur de præfatis certiſſimam ſcientiam poſſidere. Quamuis aliundè ſumma Vuallisij authoritas, profundumque ingenium in Geometricis, valdè nos concutiat.

Quid quid ſit, certum eſt, tàm noſtras infinitas ſpirales, in quibus anguli ad angulos ſunt in multiplicatis rationibus incidentium; quàm Vuallisianæ, in quibus anguli ad angulos ſunt in ſubmultiplicatis rationibus incidentium, poſſe ad infinitè infinitas dilatari; ſecundum quod ipſa trilinea parabolica fuerunt ſic ampliata. Quodlibet enim trilineum inſeruiet vni ſpatio ſpirali, quod ex illo menſurabitur. Sed omittamus hæc Lectorum induſtriæ, & ad alia properemus.

DE INFINITIS CONOIDIBVS HYPERBOLICIS.

QVam fœcunda, veritatumque ferax extet infinitarum parabolarum doctrina, vnicuique manifestum erit recogitanti in nostris operibus firmata. Ast nec hucusque exinanita putanda est. Pariet enim adhuc mensuram, & centra grauitatis infinitorum solidorum, quæ infinita Conoidea Hyperbolica iure meritò nuncupari possumus. His famulantur infinita trilinea principalia. Et ex illis hauriemus antedicta symptomata de talibus conoidibus, quæ dici poterunt principalia. Quumque infinita trilinea fuerint extensa ad infinitè infinita. Lector poterit suo Marte etiam hæc conoidea ampliare. Genesim verò cum cœteris talium infinitorum solidorum, recenter nobis subministrata fuit à Methodo, qua in proposit. 16. & 17. Miscellanei nostri Geometrici parte 1. vsi sumus in cubatione Conoidis Hyperbolici ordinarij, Geometris sat familiaris.

Hæc autem talis est. Cogitemus figuram ABC, deficientem ad partes B, cuius basis ADC, diame-



meter DB, quæ taliter sit continuata ad F, vt vbicunque applicatis ordinatim AD, RH, sit vt quadratum AD, ad quadratum RH, sic differentia quarumlibet potestatum DF, FB, ad differentiam potestatum HF, FB. Et sic vbilibet.

Sisit vt quadratum AD, ad quadratum RH, sic DB, differentia inter DB, FB, ad BH, differentiam inter HF, FB. Est luce clarius, figuram ABC, fore parabolam quadraticam.

Item, si sit vt quadratum AD, ad quadratum

PH,

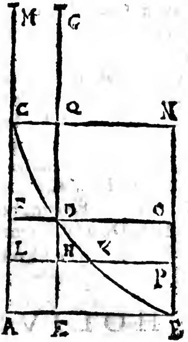
RH, sic differentia quadratorum DF, FB, ad differentiam quadratorum HF, FB. Figuram esse hyperbolam ordinariam, cuius centrum F, ex centro FB, paucis fiet manifestum. Nam differentia quadratorum DF, FB, est rectangulum sub DB, & sub composita ex DB, & ex dupla FB. Pariter differentia quadratorum HF, FB, est rectangulum sub HB, & sub composita ex HB, & ex dupla BF, quæ erit diameter transuersa hyperbolæ. Hæc omnia etiam parum in doctrinis conicorum exercitatis sunt obuia.

Quandò verò fit vt quadratum AD, ad quadratum RH, sic differentia cuborum, vel quadrato quadratorum, &c. DF, FB, ad differentiam cuborum, vel quadratoquadratorum, &c. HF, FB; nescimus tunc cuius indolis extent figuræ ABC. Vocabimus autem ipsas cum duabus antecedentibus, nempe cum vera Hyperbola, & cum Parabola, infinitas hyperbolas. Quæ si intelligantur rotari circa BD, facile solidorum genitorum assignabimus mensuras, & centra grauitatis. Sed pro his sit

PROPOSITIO XIX.

Si trilineum Parabolicum quodcumque seriei principalis secetur DE, diametro parallela, & in ipso ordinatim applicetur LHK. Erit EB, ad HK, vt differentia potestatum EQ, QD, eiusdem gradus, cum trilineo,

rum, ad similem differentiam homogenearum potestatum HQ, QD.



Nimirum, si trilineum sit triangulum, vt ED, ad DH. Si trilineum sit quadraticum, vt differentia quadratorum EQ, QD, ad differentiam quadratorum HQ, QD. Si cubicum, vt differentiæ cuborum. Et sic in infinitum. Hæc propositio probabitur eo modo, quo probata fuit proposit. 16. citat. Miscell. Ordinatim applicetur etiam FDO,

FDO. Quoniam, ex natura trilinei, est vt AB, ad FD, sic congruens potestas AC, ad similem potestatem CF; ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit EB, ad BA, vt differentia potestatum AC, CF, congruentium trilineo, ad similem potestatem CA. Pariter, quoniam vt FD, ad Lk, sic potestas FC, ad potestatem CL, erit diuidendo, FD, seu LH, ad Hk, vt potestas CF, ad differentiam potestatum CF, CL. Probata est supra BE, ad BA, vt differentia potestatum AC, CF, ad potestatem CF. Est BA, ad FD, seu LH, vt potestas AC, ad potestatem CF. Et est LH, ad Hk, vt potestas CF, ad differentiam potestatum LC, CF. Ergo ex æquali, erit EB, ad Hk, vt differentia potestatum AC, CF, seu EQ, QD, ad differentiam potestatum LC, CF, vel HQ, QD. Quòd erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

Ex dictis, facilè patebit, si figura ABC, supra explicata sit talis quantitatis, vt eius axis DB, æquetur ED, in trilineo, & addita BF, sit æqualis DQ. Facilè inquam patebit, fore cylindrum EC, ad solidum ABC (reuolutis prius rectangulo ED, & semifigura ABD, circa DB) vt rectangulum OE, ad trilineum DEB.

Porrò ratio rectanguli OE, ad trilineum ODE, assi-

assignata fuit in corollario proposit. 15. lib. 1. de Infinit. Parab. Ibi enim traditum fuit, esse vt tot continuè proportionales in ratione EQ, QD, quarum maxima sit EQ, quotus est numerus parabolæ, & hæ tot vicibus acceptæ quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad easdem proportionales, sed sic acceptas, vt prima sit vnica, secunda dupla, tertia tripla, & sic in infinitum.

Ex quibus hauriemus ad nostrum propositum. *Quod si ratio DF, ad FB, continuetur ad tot terminos vt numerus eorum æquetur numero hyperbolæ, erit cylindrus EC, ad conoides ABC, vt tot tales proportionales replicatæ secundum numerum hyperbolæ, ad easdem, sed replicatas secundum progressionem Arithmeticam numerorum 1. 2. 3. 4. &c.* Nimirum si conoides sit primum, nempe parabolicum, vt dupla DF, ad vnicam DF. Si conoides sit secundum, nempe hyperbolicum ordinarium, vt tripla DF, vna cum tripla FB, ad vnicam FD, cum dupla FB. Si conoides sit secundum, vt quadrupla DF, cum quadrupla FB, & cum quadrupla harum tertia proportionali, ad DF, duplam FB, & triplam tertiam proportionalem. Et sic in cęteris.

SCHOLIVM II.

Sed insuper patebit, conoides ABC, & trilineum DEB, fore magnitudines proportionaliter analogas, &c. Eodem ergo modo secabitur BD, à

cen-

centro grauitatis solidi, ac DE, à centro æquilibrij trilinei appensi secundum DE.

Sed quomodò possit reperiri centrum æquilibrij præfati trilinei, facilè habebimus ex proposit. 14. lib. 3. De Infin. Parab. Cum enim inibi assignatum sit centrum æquilibrij portionis BDO, appensæ secundum BO, vel ED; ex hoc, ex centro æquilibrij rectanguli EO, & ex ratione portionis ad trilineum, habebimus centrum æquilibrij quæsitum. Et consequenter centrum grauitatis dicti solidi.

SCHOLIVM III.

Et hæc sunt (Benigne Lector) quæ pro hac nona vice sufficere debent. Alia etiam addere erat animus. Sed munus nouiter nobis impositum, Geometriam explicandi in Patauino Lyceo, coegit ad alia respicere. Ast prout est in adagio. *Quod differtur, non aufertur*. Si ex nostris elucubrationibus aliquam capis vtilitatem, aut voluptatem: opta nobis & vitam, & sanitatem. Quas si Deus largiri dignabitur, cum Geometriæ incumbere competat nunc ex officio, poteris non pauca expectare. Vale.

FINIS.